قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك :

(تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول (34 درجة) 1)إذا كانت الدالة f مستمرة و g ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$، فاثبت صحة المتراجحة التالية :

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \max|f|\, V_a^b(g) : a \le x \le b$$

علماً أن التكامل موجود على $[a,b]$.

2)بنفس الفرضيات في الطلب الأول (1) بين أن الدالة : $J(x)=\int_a^x f(t)\,dg(t)\ ;\ J(a)=0\ ,\ x\in[a,b]$

ذ.ت.م على $[a,b]$ و أنها مستمرة في النقطة $x = x_0$، إذا كانت g مستمرة فيها . و هل هي كمولة لوبيغياً على $[a,b]$؟ و لماذا؟ .

3)ماذا تعني بـ قياس ليبيغ في IR، ثم أوضح إن كان هذا القياس σ- منتهٍ من أجل المجموعات : $E_n = [-n,-n+1[\cup[n-1,n]\ ;\ (n \ge 1)$، مع توضيح السبب؟ .

السؤال الثاني (33 درجة):

1)تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$\int_0^3 f\,dg = \quad ;\quad f(x)=\begin{cases} x & ; x\in[0,\tfrac{1}{2}[\\ x+1 & ; x\in[\tfrac{1}{2},1] \\ 2x & ; x\in]1,3] \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=[x]$$

ثم أحسبه في حال وجوده .

2)بين أن الدالة: $f(x)=|x+2|$ قابلة للاشتقاق تقريباً في كل مكان على الفترة $[-3,-1]$، و هل هي مستمرة مطلقاً على تلك الفترة مع التوضيح (مع حساب التغير الكلي لها على الفترة $[-1,2]$.

3)أثبت أن الدالة المميزة لمجموعة الأعداد العادية قيوسة على الفترة $E=[a,b]$ و $Q \subset E$

كما و يطلب إثبات أن الدالة: (λ^{*}) تعتبر قياساً خارجياً على $\mathcal{P}(IR)$ باختصار.

السؤال الثالث (33 درجة): 1)تحدث عن وجود تكامل ليبيغ التالي: $\int_E f(x)\,d\lambda$ حيث

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$ ، $E=[0,1]$ ثم أحسبه في حال الإيجاب.

2)أثبت أن الصف $K=\{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\}$ يولد جبر بوريل ، ثم اكتب من عندك صفاً يكون صفاً مطرداً و لا يكون جبراً تاماً على X غير الخالية.

3)كيف يمكنك أن تبين فيما إذا كانت الدالتان التاليتان :

$$h_1(x)=x^2+3\ ,\ h_2(x)=\begin{cases} x^2+3 ; & x\in[1,6]-N \\ 0 ; & x\in N \end{cases}$$

متساويتان تقريباً في كل مكان على الفترة $[1,6]$، و أيهما قيوسة؟ و لماذا ؟ .

ـأكمل العبارة التالية : $\int_a^b (x-[x])\,df(x) = ...$ (بدون حل) .

-------------انتهت الأسئلة-------------

حمص في 2016 / 2 /16 — مدرس المقرر:د.محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير

الفصل الأول للعام $\frac{2015}{2016}$

السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة: 100

السؤال الأول (34): 1) لدينا f مستمرة و g ذات تغير محدود على [a,b]، والمطلوب إثبات التراجح المطلوب (علماً أن التكامل موجود)، من أجل تجزئة P لـ [a,b] لدينا:

$$|S(f,g;P)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g(x_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)|\,|\Delta g(x_k)|$$

$$\le \max_{a\le x\le b}|f(x)| \sum_{k=1}^{n} |\Delta g(x_k)| \le \max_{a\le x\le b}|f(x)| \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

24

ومنه بجعل نظيم التجزئة $\lambda(P) \to 0$ نحصل على العلاقة (أو التراجح) المطلوب.

2) بنفس الفرضيات السابقة لنثبت أن J ذات تغير محدود على [a,b]. من أجل ذلك لنضع $M = \max_{a\le x\le b}|f|$ عندها أياً كانت التجزئة P لـ [a,b] وحسب المبرهنة السابقة يكون

$$\vartheta(J;P) = \sum_{k=1}^{n} |J(x_k) - J(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dg(t)\right| \le$$

$$\le M \sum_{k=1}^{n} \overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(g) = M \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

كما يبين أن J ذات تغير محدود على [a,b].

الاستمرار: نفرض أن g مستمرة عند $x = x_0$، عندئذ يكون حسب مبرهنة الاستمرار للدالة ...

$$|J(x_0+y) - J(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+y} f(t)\,dg(t)\right| \le M \overset{x_0+y}{\underset{x_0}{V}}(g) =$$

$$= M\,[V_g(x_0+y) - V_g(x_0)] \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

وذلك حسب مبرهنات سابقة، وهذا يبين أن J دالة مستمرة عند النقطة $x = x_0$.

*) كون الدالة J ذات تغير محدود على [a,b] [illegible]

انتهى الاستمرار أيضاً.

يتبع

(10)

(3) خطأ بسيط، لسبب الخطأ أن المعرف في الجبر التام $\mathcal{L}$ قياسياً بسيطاً في $\mathbb{R}$، ومجموعة ~~$\mathbb{R}$~~
من $E \in \mathcal{L}$ مستوية منتهية لو بنفيها وقياسها هو العدد $\lambda(E)$.

.. خطأ بسيط هنا ... لذلك: $\lambda(E_n) = \lambda(\ldots) + \lambda(\ldots) = 2\ldots$

وكذلك $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$، ... E_n منتهية ومنفصلة ... /

السؤال الثاني (33°)

(16)

(1) التكامل موجود: الدالة f محدودة ورتيبة في $[0,3]$ لأنها متزايدة ... وأيضاً ... (دالة الصحيح) ... أنه موجود، الدالة f ... g ... وحسب ... التجزئة ... التكامل ... موجود ... في $[0,3]$.

حساب: نستخدم ... التكامل بالتجزئة

$$\int_0^3 g\,df = \left[f \cdot g\right]_0^3 - \int_0^3 f\,dg \quad \ldots \quad (*)$$

ولحساب ...

$$\int_0^3 f\,dg = f(0)\left[g(0+0) - g(0)\right] + f(1)\left\{g(1+0) - g(1-0)\right\} + f(2)\left\{g(2+0) - g(2-0)\right\}$$
$$+ f(3)\left\{g(3) - g(3-0)\right\}$$
$$= 0 + 2(1) + 4(1) + 6(1) = 12$$

بالعودة إلى (*) أعلاه:

$$\int_0^3 g\,df = \left(f(3)g(3) - \underbrace{f(0)g(0)}_{0}\right) - 12 = 6 \times 3 - 12 = 6$$

---

(2) الدالة f ... ، $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; -1 \geq x \geq -2 \\ -x-2 & ; -3 \leq x < -2 \end{cases}$ ، ... الدالة ... متصلة

عند النقطة $x = -2$ ، ... في الفترة $[-3,-1]$ ... (أو ... $x=-2$)

... أن $\lambda(E_0) = 0$ ... الدالة ... مستمرة.

وحسب ... في تلك الفترة ...

$$\overset{2}{\underset{-1}{V}}(f) = 4 - 1 = 3$$

* ... الدالة ... :

الدالة المميزة قيوسة لمجموعة الأعداد العادية ، ومقياسها هو.

$I_Q(x) = \begin{cases} 1; & x \in Q \\ 0; & x \in E-Q \end{cases}$; $E=[a,b]$

(17)

قيوسة :

$$E(I_Q > c) = \begin{cases} E=[a,b]; & c<0 \\ Q; & 0 \le c < 1 \\ \phi; & c \ge 1 \end{cases} \quad c \in R$$

إذاً هذه الدالة قيوسة في $E=[a,b]$ لأن مجموعات المستوى الأعلى كلها قيوسة مهما كانت $c \in R$.

ب) أو أن المجموعة قيوسة وهي Q فإن المقياس حسب ... في $E=[a,b]$.

ج) لتكن الدالة λ^* قياس خارجي في $P(R)$:

- لدينا $\lambda^*(\phi)=0$ حسب التعريف.
- لتكن E ، G من $P(R)$ بحيث $E \subseteq G$ ، من هذا نغطي ل G تغطي ل E (حسب التعريف). من هذا ينتج أن $\lambda^*(E) \le \lambda^*(G)$.
- لتكن $\{E_n\}$ متتالية من $P(R)$ ، فيصح أن $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$

السؤال الثالث (33°) : (1) وجود تكامل لبيغ ، الدالة $f(x)=e^{-x}$ ذات مجموعة التعريف ومستمرة على المجال ، الفترة $E=[0,1]$ مقيسة لأنها مجال ، ... بالإضافة الدالة محدودة على E ، والمجموعة E مقيسة لأنها $\lambda(E)<\infty$.

ج 2) بما أن الدالة قيوسة ومستمرة فيكون التكاملان متساويين على E حسب مبرهنة :

(20)

$$(L)\int_{E=[0,1]} e^{-x}\, d\lambda = (R)\int_0^1 e^{-x}\, dx = -\left(e^{-x}\right)\Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{e}-1\right) = 1-\frac{1}{e} > 0$$

(2) الصف ... ، والصنف المطلوب هو :

$$A = \{\phi, X, G\}$$

هناك طرق ... هو ليس جبراً تاماً لأنه ليس مغلقاً بالنسبة للتتميم في X.

(3) الدالتان : $h_1 = h_2$ في $[1,6]-N$

(13)

$h_1 \neq h_2$ في N حيث $\lambda(N)=0$.

ما يعني أنهما متساويتان تقريباً ، ولما كانت h_1 مستمرة في $[1,6]$ فهي قيوسة ...

يتبع

فتكون h_2 غير محدودة.

- إذن البرهان :

$$\int_a^b (x-[x])\,dF(x) = \left(F(x)(x-[x])\right)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,d(x-[x]).$$

أستاذ المقرر

د. محمد عامر

انتهى التوزيع

السبت

٢٠١٦ / ١ / ١٦

كلية العلوم — الفصل الأول للعام 2014/ 2015 — الدرجة : 100

قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات — المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

(من 1 إلى 7 لكل سؤال (12 درجة) و للسؤال الثامن (16 درجة))

1) أثبت أن للدالة f المستمرة مطلقاً على $[a,b]$ هي ذ ت م عليها ، وهل العكس صحيح ، وضح ذلك بمثال ؟ بدون حل.

2) أوجد دالة التغير للدالة $g(x)=\frac{1}{1+x}$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم حقق من أجل g شرط ليبشيتز و ارسمها على نفس الفترة، مع ذكر خاصة الاستمرار لدالة التغير على $[0,3]$.

3) اكتب صيغة دالة القفز على $[a,b]$ لدالة h متزايدة عليها وهل هي قيوسة على نفس الفترة و لماذا ؟ و ما نوع الفرق : $h(x)-J_h(x)$ من حيث الاستمرار بانتظام على $[a,b]$.

4) خذ $X=\{1,2,3,4\}$ و الصف $H=\{\Phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ، مع تبيان فيما إذا كان الصف H- تبولوجيا- جبر على X ، ثم أوجد أصغر جبر يحوي H . و علل هل الأخير جبر تام و صف مطرد ؟

5) تأكد من وجود تكامل ستيلجس: $J=\int_0^3 |x+1|\, d[V_g(x)]$ و أحسبه في حال وجوده، حيث الدالة $V_g(x)$ هي دالة التغير التي أوجدتها ، في السؤال (2) أعلاه ، ثم بين أن الدالة $u(x)=|x|$ اشتقاقية تقريباً في كل مكان على الفترة $[-2,2]$.

6) لتكن $X=R$ ، $S=B(R)$ ، μ قياس ليبيغ على R و $F_n=[n+1,\infty[_{n\geq1}$ ما هو الشرط الواجب إضافته لتتحقق العلاقة: $\mu(\bigcap F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$ بعد إيجاد طرفيها ؟ و ماذا تسمى هذه الخاصة بالنسبة للقياس μ ؟

7) احسب تكامل ليبيغ للدالة الثابتة: $w(x)=C$ على المجموعة : $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}[\}$ بعد التأكد من وجوده، و ما هو التغير الكلي للدالة الثابتة على فترة مثل $[-1,10]$ ؟ .

8) أكمل ما يلي (بدون حلول):

$$a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=...;\ p\neq 1\ ,\ b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=...\ ,\ c)\ V_0^1(\varphi)=...$$

$$d)\ V_0^1(|\varphi|)=...\ ,\ e)\ J=(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=....$$

حيث φ دالة ديريخليه على $[0,1]$ و المعرفة بالشكل:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1;\ x\in[0,1]\cap\widetilde{Q}\\ -1;\ x\in[0,1]\cap Q\end{cases}$$

حيث الدالة g تأخذ قيماً ثابتة على الفترة $[a,b]$ و f مستمرة عليها .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د.محمد عامر

حمص في 2015/2/12

جامعة ... / كلية العلوم / قسم الرياضيات

توزيع درجات مقرر المتغيرات المحدودة

الامتحانات الفصل الأول $\frac{2011}{2010}$ — الدرجة: 100

السنة الثالثة — رياضيات

س١ (36 د)

(أ) إثبات أن الدالة f المطلقة الاتصال على $[a,b]$: ليكن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

لأي عائلة $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ من الفترات الجزئية المنفصلة ... $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ يتحقق $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$. نأخذ التجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_N = b\}$ على $[a,b]$

بحيث $x_k - x_{k-1} < \delta$; $k = 1, 2, \dots, N$ ... للفترة $[x_{k-1}, x_k]$ نجد $V(f, P_k) \le 1$

$\bigvee_a^b(f) = \sum_{k=1}^{N}\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \le \sum_{k=1}^{N} 1 = N < \infty$; $\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \le 1$; $k = 1, 2, \dots, N$

إذن f محدودة التغير على $[a,b]$.

— العكس ليس صحيحاً، مثلاً دالة الصحيح $y = [x]$ محدودة التغير على $[a,b]$ ... وليست مطلقة الاتصال على $[a,b]$

(12)

(ب) إيجاد دالة التغير للدالة $g(x) = \frac{1}{1+x}$ على $[0,3]$ ... ونلاحظ أنها متناقصة على $[0,3]$

$\bigvee_0^x(g) = f(0) - f(x)$; $0 < x \le 3$

$= 1 - \frac{1}{1+x}$

(12)

وعليه فإن

$\bigvee_0^x(g) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & ; 0 < x \le 3 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

... على $[0,3]$ ...

— وهي تحقق شرط ليبشتز (g)

$|g(x) - g(y)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right| \le \frac{1}{1}|x-y| = |x-y|$

$; x, y \in [0,3]$

الرسم

— ...

— وهي دالة مستمرة على الفترة $[0,3]$ ...

وهي دالة محدودة التغير على الفترة $[0,3]$ ...

(13) ... دالة h ... على $[a,b]$ ...

$d_h(x) = \begin{cases} 0 ; & x = a \\ [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x}[f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(x) - f(x-0)] & a < x \le b \end{cases}$

... على $[a,b]$

(12)

(1)

يتبع ←

(2)

ولأنه $\int_a^x$ ... [a,b] [illegible]

[illegible] $\varphi(x) = h(x) - \int_a^x$ [illegible] [a,b] [illegible] (a,b).

س٣ (36 د)

(4) لدينا هنا $X=\{1,\dots,4\}$ والصف $H=\{\phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$

نجد هنا أن H [illegible] X [illegible] :

$\{1\}^c = X-\{1\} = \{2,3,4\} \notin H$

وإضافة [illegible] H

$H_1 = \{\phi, X, \{1\}, \{2,3,4\}, \{3\}, \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$

وذلك لأنه [illegible] شروط الجبر المعرفة على X.

* [illegible] X [illegible]

(12)

(5) [illegible] $f(x)=|x+1| = x+1$ [illegible] [0,3] [illegible]

[illegible] $\varphi_g(x)$ [illegible] [0,3] [illegible]

[illegible]

$$\delta = \int_0^3 f\, d\varphi_g(x) = \int_0^3 f(x)\,\varphi_g'(x)\,dx = \int_0^3 (x+1)\frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\ln(x+1)\right]_0^3 = \ln(4)$$

* [illegible] $u(x)$ [illegible] [-2,2] [illegible]

[illegible] [-2,2] [illegible]

(12)

(6) لدينا $X=\mathbb{R}$ و $S=\beta(\mathbb{R})$ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] $\mathbb{R}$,

[illegible] $\mu(F_1)<\infty$ (أو $\mu(F_n)<\infty$) [illegible]

[illegible] F_n [illegible] $F_n \supseteq F_{n+1}$ [illegible] n)

[illegible] $\{F_n\}$ [illegible] $F = \lim_{n\to\infty} F_n = \phi$ و $\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\infty$

[illegible] $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)=\mu(\{\phi\})=0$ [illegible] $\mu(F_n)<\infty$

* [illegible]

(12)

[illegible] (28) [illegible]

(7) [illegible] W [illegible]

[illegible] E [illegible]

[illegible] $\lambda(E)=1$ [illegible]

[illegible] E [illegible]

(12)

$$I = (L)\int_{E} W(x)\,d\lambda = c\int_{E} d\lambda = c\,\lambda(E) = c \times 1 = c.$$

(8) [illegible] $[-1,10]$.

(16)

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \overset{(p>1)}{=} \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx \quad (p=1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2} + 1$

c) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi) = \infty$, d) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(|\varphi|) = 0$

[illegible] φ [illegible] $(0,1)$.

e) $J = (S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\,[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[g(c_k+0) - g(c_k-0)]$
$+ f(b)\,[g(b) - g(b-0)]$

[illegible] $[a,b]$.

[illegible]

[illegible] ٢٠١٥/٦/١٢

[illegible]

(3)

جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب : خضر صطور
كلية العلوم	الفصل الدراسي الأول ٢٠٠٩/٢٠١٠	الدرجة: ٨٠
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة: ساعتان

السؤال الأول(٢٠ درجة): (أ) - لتكن f دالة مستمرة و g دالة محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، و لنضع

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dg(t) \quad ; \quad x \in [a,b];$$

و المطلوب :

(١). أثبت أن الدالة F محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(٢). إذا كانت الدالة g مستمرة في النقطة $x = x_0$، فبين أن الدالة F تكون كذلك .

(ب). أذكر مثالاً عن دالة تحقق شرط ليبشتز على فترة مغلقة و محدودة ، بحيث تكون فيه مستمرة مطلقاً و قابلة للمكاملة لوبيغياً على تلك الفترة ، مع ذكر الحل فقط لتحقق الشرط على الفترة المذكورة.

السؤال الثاني(٢٠ درجة): (أ). لتكن لدينا الدالة :

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x + 3 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

و المطلوب :

(١). اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين متزايدتين على الفترة $[0,2]$.

(٢). إذا كانت $f_1(x) = e^x$ معرفة على $[0,2]$، فأحسب قيمة التكامل $(S)\int_0^2 f_1(x)\,d\psi(x)$ بعد التأكد من وجوده.

(ب). أثبت إذا كانت الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على المجموعة E ، فإن f تكون قيوسة على E .

السؤال الثالث(٢٠ درجة) : (أ). لتكن f دالة حقيقية معرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل :

$$f(x) = 0 ;\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, f(x) = \frac{1}{2} ; x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, f(x) = \frac{3}{4} ; x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right[, \ldots , f(x) = 1 ; x = 1$$

بين أن لهذه الدالة المتزايدة قفزة عند كل نقطة: $x_k = 1 - \frac{1}{2^k} ; (k \ge 1)$ تساوي $\frac{1}{2^k}$، ثم أحسب:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] .$$

(ب). لتكن المجموعة $X = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ وليكن الجبر التام $S = \mathcal{P}(X)$ ، و لنضع

$\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} ; A \in S$ ، $\mu(\phi) = 0$. اثبت ان μ تعرف قياساً على S ، وهل هو منته؟ مع التعليل.

السؤال الرابع(٢٠ درجة): لتعرف الدالة f بالشكل: $f(x) = x^2[1 - \varphi(x)] ; x \in [2,5] = E$ حيث φ دالة ديريخليه على الفترة E ، والمطلوب :

(١). هل الدالة $h(x) = 1 - \varphi(x)$ ،كمولة حسب ستيلتجس بالنسبة لدالة $g(x) = 2x$ على الفترة $E = [2,5]$ ، ولماذا ؟

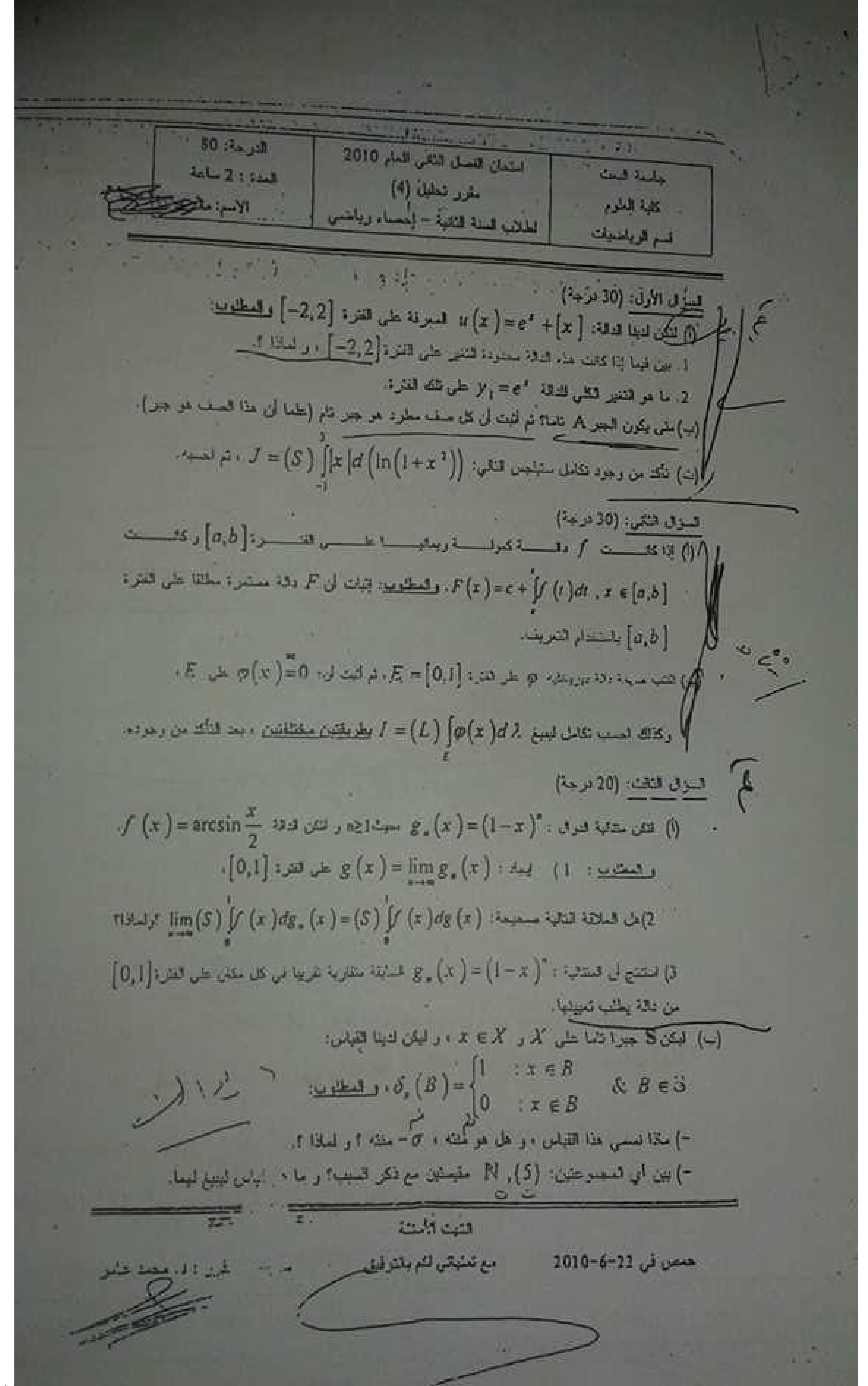
(٢). اثبت أن دالة ديريخليه تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على الفترة E ،

(٣). تأكد من وجود التكامل: $(L)\int_E f(x)\,d\lambda$ ، ثم أحسب قيمته في حال وجوده .

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٠١٠/١/١٧ — مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح — مدرس المقرر

د.محمد عامر



جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان الفصل الثاني للعام 2010 مقرر تحليل (4) لطلاب السنة الثانية – إحصاء رياضي	الدرجة: 80 المدة: 2 ساعة الاسم:

السؤال الأول: (30 درجة)

(أ) لتكن لدينا الدالة: $u(x)=e^x+[x]$ المعرفة على الفترة $[-2,2]$ والمطلوب:

1. بين فيما إذا كانت هذه الدالة محدودة التغير على الفترة: $[-2,2]$، و لماذا؟
2. ما هو التغير الكلي للدالة $y_1=e^x$ على تلك الفترة.

(ب) متى يكون الجبر A تاماً؟ ثم أثبت أن كل صف مطرد هو جبر تام (علماً أن هذا الصف هو جبر).

(ت) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي: $J=(S)\int_{-1}^{3}|x|\,d\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)$، ثم احسبه.

السؤال الثاني: (30 درجة)

(أ) إذا كانت f دالة كمولة ريمانياً على الفترة: $[a,b]$ وكانت $F(x)=c+\int_a^x f(t)\,dt\ ,\ x\in[a,b]$. والمطلوب: إثبات أن F دالة مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف.

(ب) لتكن φ دالة ديريكليه على الفترة: $E=[0,1]$، ثم أثبت أن: $\varphi(x)\overset{a.e}{=}0$ على E،

وكذلك احسب تكامل ليبغ $I=(L)\int_E \varphi(x)\,d\lambda$ بطريقتين مختلفتين، بعد التأكد من وجوده.

السؤال الثالث: (20 درجة)

(أ) لتكن متتالية الدوال: $g_n(x)=(1-x)^n$ بحيث $n\geq 1$ و لتكن الدالة $f(x)=\arcsin\frac{x}{2}$.

والمطلوب: 1) أوجد: $g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ على الفترة: $[0,1]$.

2) هل العلاقة التالية صحيحة: $\lim_{n\to\infty}(S)\int_0^1 f(x)\,dg_n(x)=(S)\int_0^1 f(x)\,dg(x)$ و لماذا؟

3) استنتج أن المتتالية: $g_n(x)=(1-x)^n$ السابقة متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة: $[0,1]$ من دالة يطلب تعيينها.

(ب) لتكن S جبراً تاماً على X و $x\in X$، و ليكن لدينا القياس:

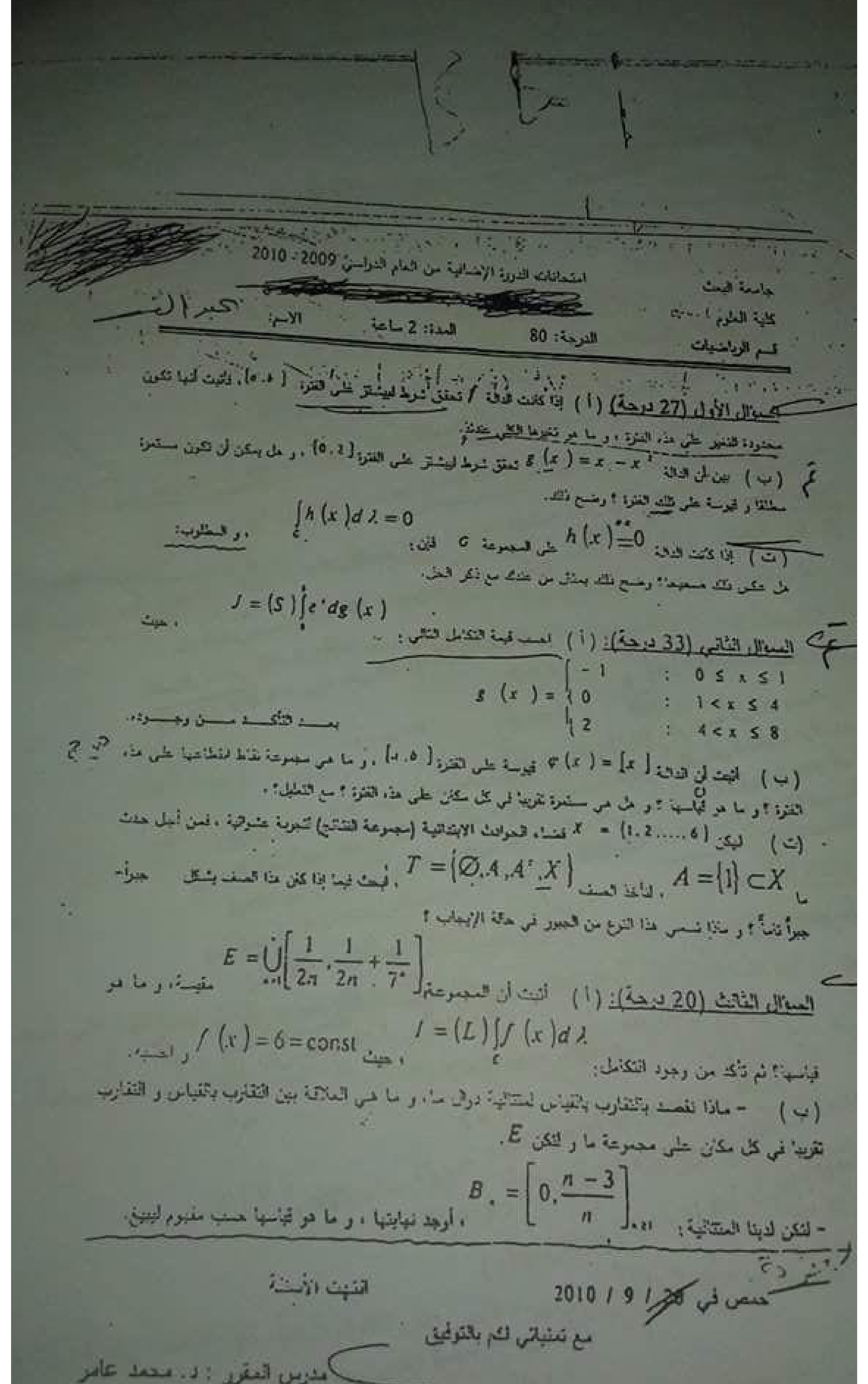
$$\delta_x(B)=\begin{cases}1 & : x\in B\\ 0 & : x\notin B\end{cases}\quad \& \ B\in S$$

والمطلوب:

-) ماذا نسمي هذا القياس، و هل هو تام، σ- منته؟ و لماذا؟
-) بين أي الفضاءين: (N, S) مقيسين مع ذكر السبب؟ و ما القياس لبيغ لهما.

انتهت الأسئلة

حمص في 2010-6-22   مع تمنياتي لكم بالتوفيق   المدرس: د. محمد خضر



جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010

الدرجة: 80 المدة: 2 ساعة الاسم:

السؤال الأول (27 درجة) (أ) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a, b]$، فأثبت أنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و ما هو تغيرها الكلي عندئذٍ؟

(ب) بين أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[0, 2]$، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً و قيوسة على تلك الفترة؟ وضح ذلك.

(ت) إذا كانت الدالة $h(x) \overset{a.e}{=} 0$ على المجموعة G فإن: $\int_G h(x)\, d\lambda = 0$، و المطلوب: هل عكس ذلك صحيح؟ وضح ذلك بمثال من عندك مع ذكر الحل.

السؤال الثاني (33 درجة): (أ) احسب قيمة التكامل التالي: $J = (S)\int_I e^x\, dg(x)$، حيث:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \le x \le 1 \\ 0 & : 1 < x \le 4 \\ 2 & : 4 < x \le 8 \end{cases}$$

بعد التأكد من وجوده.

(ب) أثبت أن الدالة $\varphi(x) = [x]$ قيوسة على الفترة $[0, 5]$، و ما هي مجموعة نقاط انقطاعها على هذه الفترة؟ و ما هو قياسها؟ و هل هي مستمرة تقريباً في كل مكان على هذه الفترة؟ مع التعليل؟.

(ت) ليكن $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ فضاء الحوادث الابتدائية (مجموعة النتائج) لتجربة عشوائية، فمن أجل حدث ما $A = \{1\} \subset X$، لنأخذ الصف $T = \{\varnothing, A, A^c, X\}$، فابحث فيما إذا كان هذا الصف يشكل جبراً، جبراً تاماً؟ و ماذا نسمي هذا النوع من الجبور في حالة الإيجاب؟

السؤال الثالث (20 درجة): (أ) أثبت أن المجموعة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{7^n}\right]$ مقيسة، و ما هو قياسها؟ ثم تأكد من وجود التكامل: $I = (L)\int_E f(x)\, d\lambda$، حيث $f(x) = 6 = const$ و احسبه.

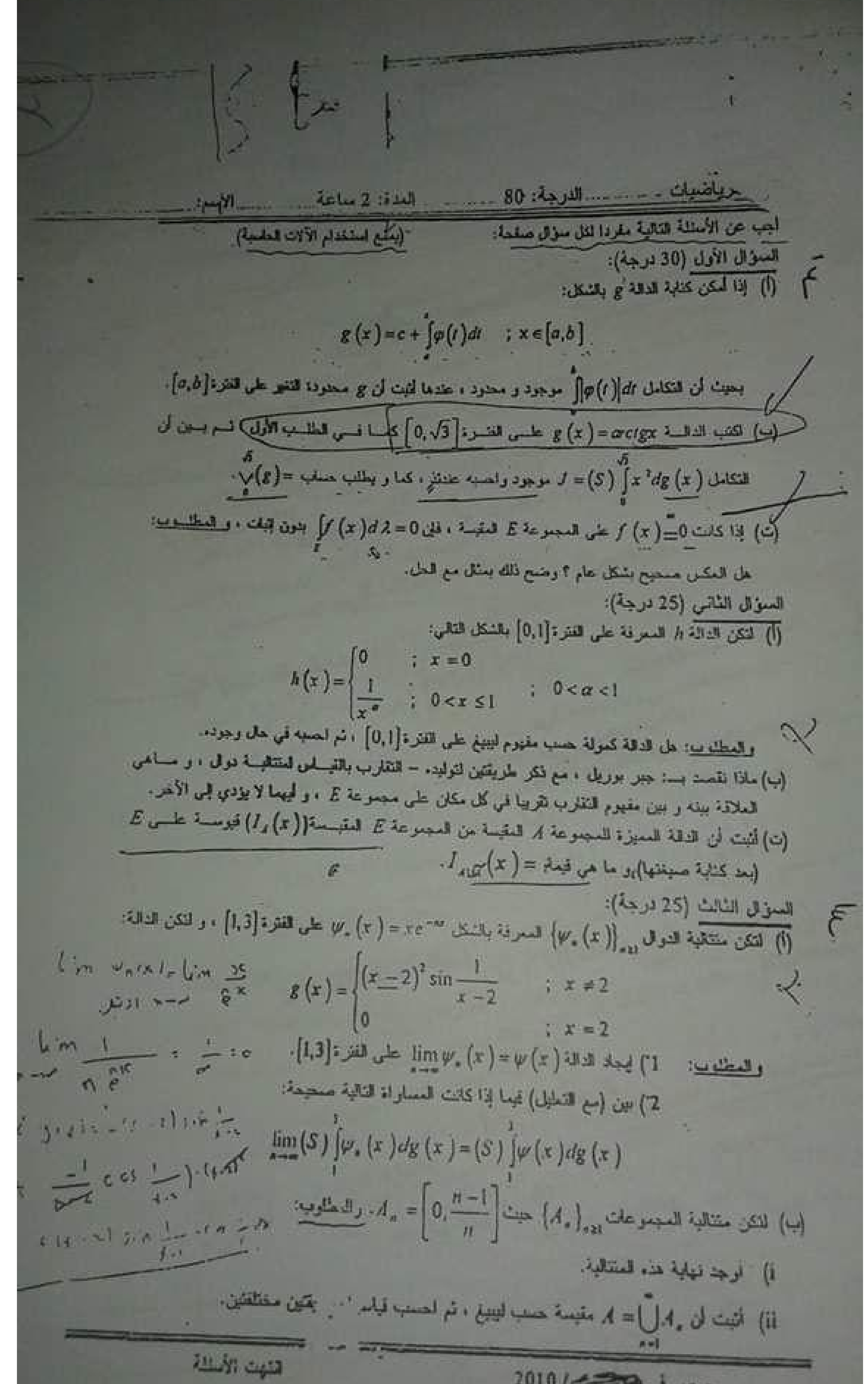
(ب) - ماذا نقصد بالتقارب بالقياس لمتتالية دوال ما، و ما هي العلاقة بين التقارب بالقياس و التقارب تقريباً في كل مكان على مجموعة ما و لتكن E.

- لتكن لدينا المتتالية: $B_n = \left[0, \frac{n-3}{n}\right]_{n \ge 1}$، أوجد نهايتها، و ما هو قياسها حسب مفهوم لبيغ.

انتهت الأسئلة حمص في 2010 / 9 / 28

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر



رياضيات .... الدرجة: 80 .... المدة: 2 ساعة .... الاسم: ....

اجب عن الأسئلة التالية مفردا لكل سؤال صفحة: (يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل:

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt \quad ; x\in[a,b]$$

بحيث أن التكامل $\int_a^b|\varphi(t)|dt$ موجود و محدود ، عندها أثبت أن g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(ب) اكتب الدالة $g(x)=arctgx$ على الفترة $[0,\sqrt{3}]$ كما في الطلب الأول ثم بين أن التكامل $J=(S)\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dg(x)$ موجود واحسبه عندئذ ، كما و يطلب حساب $\overset{\sqrt{3}}{\underset{0}{V}}(g)=$

(ت) إذا كانت $f(x)\overset{\sim}{=}0$ على المجموعة E المقيسة ، فإن $\int_E f(x)d\lambda=0$ بدون إثبات ، و المطلوب:

هل العكس صحيح بشكل عام ؟ وضح ذلك بمثال مع الحل.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالة h المعرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$h(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ \frac{1}{x^{\alpha}} & ; 0<x\le 1\end{cases} \quad ; 0<\alpha<1$$

و المطلوب: هل الدالة كمولة حسب مفهوم ليبيغ على الفترة $[0,1]$ ، ثم احسبه في حال وجوده.

(ب) ماذا نقصد بـ: جبر بوريل ، مع ذكر طريقتين لتوليده. – التقارب بالقياس لمتتالية دوال ، و ما هي العلاقة بينه و بين مفهوم التقارب تقريبا في كل مكان على مجموعة E ، و أيهما لا يؤدي إلى الآخر.

(ت) أثبت أن الدالة المميزة للمجموعة A المقيسة من المجموعة E المقيسة $(I_A(x))$ قيوسة على E (بعد كتابة صيغتها)، و ما هي قيمة $I_{A\cap CA}(x)=$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) لتكن متتالية الدوال $\{\psi_n(x)\}_{n\ge1}$ المعرفة بالشكل $\psi_n(x)=xe^{-nx}$ على الفترة $[1,3]$ ، و لتكن الدالة:

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2\sin\frac{1}{x-2} & ; x\ne 2\\ 0 & ; x=2\end{cases}$$

و المطلوب: 1) إيجاد الدالة $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x)$ على الفترة $[1,3]$.

2) بين (مع التعليل) فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_1^3\psi_n(x)dg(x)=(S)\int_1^3\psi(x)dg(x)$$

(ب) لتكن متتالية المجموعات $\{A_n\}_{n\ge1}$ حيث $A_n=\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ ، والمطلوب:

i) أوجد نهاية هذه المتتالية.

ii) أثبت أن $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ مقيسة حسب ليبيغ ، ثم احسب قياسها بطريقتين مختلفتين.

انتهت الأسئلة

2010

$x \quad [0,2] \quad x \to x^2$

$x^2 \quad [0,2]$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الدورة التكميلية للعام ٢٠١١/٢٠١٢
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول: (أ) – أي الدوال التالية ذ ت م مع التعليل :

$f_1(x) = \tan x \; ; x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ، $f_2(x) = e^{-x} ; x \in [0, \infty[$

$f_3(x) = \frac{3}{2x} ; x \in [1, 8]$

ثم احسب التغير الكلي للدالة f_1 على نفس الفترة فقط .

(ب) – أثبت أنه إذا حققت الدالة f شرط ليبشتز على الفترة $[a, b]$ فتكون ذ ت م على هذه الفترة مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، ثم طبق ذلك على الدالة : $f(x) = \sin x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ج) –اكتب مجموعة مغلقة و أخرى مفتوحة على أن تكون بوريلية و مقيسة و ما هو قياس كل منها ، ثم اذكر صفين يولدان جبر بوريل .

السؤال الثاني: (أ) – بين متى تكون العلاقة التالية : $\lim (S)\int_0^1 f_n(x)\, d\,g(x) = (S)\int_0^1 f\, dg$ صحيحة ، إذا فرضنا أن

$f_n(x) = x^n ; x \in [0,1]$ ، $g(x) = \begin{cases} 0 ; x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} ; 0 < x \le 1 \end{cases}$

بعد إيجاد الدالة $f(x) = \lim f_n(x)$ على الفترة $[0,1]$

(ب) –أثبت أن المجموعة : $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^n} + \frac{1}{6^n}\right]$ مقيسة حسب ليبيغ و أحسب قياسها .

(ج) –اكتب صيغة دالة ديريخليه على الفترة $\left]\sqrt{2}, 5\right]$ ، ثم أثبت أنها دالة قيوسة على تلك الفترة.

السؤال الثالث: (أ) – احسب التكامل التالي: $J = (S)\int_0^3 x^2\, d(x^2 - [x])$ بعد التأكد من وجوده .

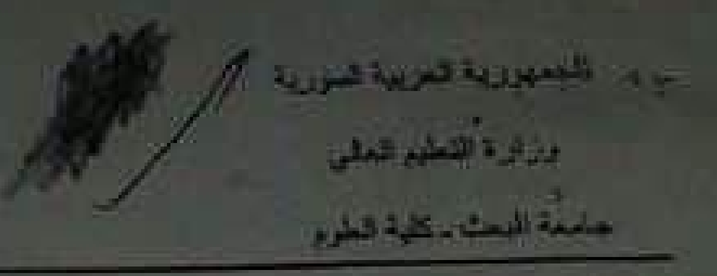
(ب) –إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ ، فإن E مجموعة مقيسة بالنسبة ل μ^* .

(ج) – أوجد دالة التغير للدالة $h(x) = \ln x$ على الفترة $[1, 4]$ ، وهل الدالة الناتجة متزايدة و محدودة على نفس الفترة مع تبرير أقوالك عندئذ .

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٠١٢/١٢/٥ مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر
د. محمد عامر



الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث - كلية العلوم

امتحان مقرر القياس ونظرية التكامل
الفصل الثاني - سنة ثالثة / رياضيات
العام الدراسي (2012 - 2013)

الاسم والرقم ....
الدرجة: 100
مدة الامتحان: ساعتان

<u>أجب عن السؤالين التاليين :</u>

<u>السؤال الأول (50 درجة) :</u>

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة التالية ((بفرض أن f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة ......)) وما هي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن الدالة :

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,dg(u) \quad ;x \in [a,b]\ ,F(a) = 0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قوسية على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;x = 0 \\ x^2 \sin\frac{\pi}{x^2} & ;0 < x \le 2 \end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب لبيغ ؟ ولماذا ؟

<u>السؤال الثاني (50 درجة) :</u>

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_0^3 \arctan x\, d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منته ، σ- منته – ثم وضح أن قياس لبيغ λ في المجموعة R هو σ- منته من أجل المجموعات :

$$E_n = [-n,-n+1[\ \cup [n-1,n[\quad ;n = 1,2,\dots$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A} = \{\{x\};\ x \in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبر ؟ ولماذا ؟ علماً أنه طبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتوبولوجيا ؟

- بين أن كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بين فيما إذا كانت المجموعة :

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{ x\ ;\ \frac{1}{k+1} \le x < \frac{1}{k}\right\}$$

مقيسة حسب مفهوم لبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

5 (Hi)

بما أن $g_n(x)$ قابل للاشتقاق أياً كان $1 \geq n$ فإن

$g_n'(x) = n x^{n-1}$; $|g_n'(x)| = |n x^{n-1}| \leq n$; $\forall n \geq 1$

المشتقة موجودة ومحدودة فهو ذو تغيرات محدودة

بما أن: $g_n(x)$ تابع متزايد على $[0,1]$ فإن المشتقة موجبة على $[0,1]$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(g_n) = g_n(1) - g_n(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}}(g_n) \leq 1 \; ; \forall n \geq 1$$

وحققت شروط المبرهنة والقرينة محققة أي أن الاستمرار صحيحة

دورة تكميلية 2010/2011

5

A- أوجد دالة التغير للدالة $g(x) = x^3$ على $[1,9]$ ثم أثبت أن الدالة الناتجة ذات تغيرات محدودة على تلك الفترة، وهل هي مستمرة إذا كانت مستمرة أم لا مع التعليل.

الحل:

$g'(x) = 3x^2$; $\forall x \in]1,9[$

$|g'(x)| = |3x^2| \leq 3(4)^2 = 48$; $\forall x \in]1,9[$

إذاً $g(x)$ ذات تغيرات محدودة (قابل للاشتقاق ومشتقه محدودة)

بما أن $g'(x) > 0$ فإن $g(x)$ متزايد وحسب مبرهنة:

$$V_g(x) = \overset{x}{\underset{1}{V}}(g) = g(x) - g(1) = x^3 - 1$$

إثبات أن $V_g(x)$ ذات تغيرات محدودة:

$|[V_g(x)]'| = |3x^2| \leq 48$; $\forall x \in]1,9[$

والمشتق موجود ومحدود وبالتالي ذات تغ...

ثم نجد دالة مستمرة لأن:

إذا كانت x نقطة من $[1,9]$ فإن $g(x)$ مستمر عند x وحسب مبرهنة إذا كان $g(x)$ مستمر عند x فإن $V_g(x)$ مستمر عند هذه النقطة

وبما أن $V_g(x)$ مستمر عند x ... $V_g(x)$ مستمر عند كل نقاط المجال $[1,9]$ ...

١

حركية ٢: إن الدالة $h(x)$ مستمرة على $[0,2]$ وقابلة للاشتقاق عليه أي أنها ناتجة مع التكامل المحدود (المحدود) ومنه الدالة h تكتب بالشكل

$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)\,dt$ وشكل أخير لها c

أي أنه يكتب بالصورة $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$ وبالتالي التغير الكلي هو

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

$$V_h(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(h) = \int_0^x |h'(t)|\,dt = \int_0^x |-2t|\,dt$$

$$= \int_0^x 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2$$

لنفرض أن $V_h(x)$ تحقق شرط ليبشتز على $[0,3]$ لدينا:

$$|V_h(x) - V_h(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y|$$

$$\leq (|x| + |y|)\,|x-y| \leq (3+3)\,|x-y| = 6\,|x-y|$$

وذلك من أجل كل $x, y \in [0,3]$ وبالتالي شرط ليبشتز محقق بالثابتة $L = 6$

وبما أن $V_h(x)$ تحقق شرط ليبشتز فهو تابع مستمر مطلقاً. (مبرهنة)

D- ليكن $g_n(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$ والدالة $f(x) = e^x$ حيث $x \in [0,1]$ والمطلوب هل تصح المساواة:

$$\lim (S) \int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = (S)\int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

حيث

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

الحل: لدينا التابع $f(x) = e^x$ مستمر على $[0,1]$ كما أن المتتالية المعطاة متقاربة نقطياً

$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \{0 \quad 0 \leq x < 1$

$$J = (S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + f(b)[g(b)-g(b-0)]$$

$$J = (S)\int_1^4 x^2\,dg(x) = \int_1^4 x^2 g'(x)\,dx + f(1)[g(1+0)-g(1)] + f(2)[g(2+0)-g(2-0)] + f(4)[g(4)-g(4-0)]$$

$$= \int_1^2 x^2\cdot 1\,dx + \int_2^4 x^2(2x)\,dx + 1^2[1-1] + 2^2[4-2] + 4^2[17-16]$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{x^4}{2}\Big|_2^4 + 8 + 16$$

$$= \frac{7}{3} + 120 + 24 = 146 + \frac{1}{3}$$

c- أوجد دالة التغير للدالة $h(x) = 1 - x^2$ على $[0,3]$

ثم بين أن دالة التغير تحقق شروط ليبشتز وأنها مستمرة مطلقاً على $[0,3]$.

الحل:

$$|h'(x)| = |-2x| = 2x \le 6 \; ; \; \forall x \in]0,3[$$

الدالة $h(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0,3[$ ولها مشتقة محدودة فهي ذات تغيرات محدودة

بما أن $\forall x \in]0,3[\; , h'(x) < 0$ فإن $h(x)$ تناقصية على $[0,3]$

وعليه فإن

$$V_h(x) = V_0^x(g) = h(0) - h(x) = x^2$$

$$|g'(x)| = \left|2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\le \left|2x\cos\frac{1}{x}\right| + \left|\sin\frac{1}{x}\right| = 2|x|\cdot\left|\cos\frac{1}{x}\right| + \left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\le 2|x| + 1 \le 2(1)+1 = 3 \; ; \; \forall x \in [0,1]$$

$$|g'(0)| = 0$$

نستنتج أن $|g'(x)| \le 3$ أيا كان $x \in [0,1]$ وحسب مبرهنة

يكون $g(x)$ ذات تغير محدود على $[0,1]$

B - لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^2$ ولتكن $g(x)$ الدالة المعرفة بـ:

$$g(x) = \begin{cases} x \; ; & x \in [1,2[\\ 3 \; ; & x = 2 \\ x^2 \; ; & x \in]2,4[\\ 17 \; ; & x = 4 \end{cases}$$

والمطلوب هل $J = (S)\int_1^4 f(x)\,dg(x)$ موجود ثم احسب قيمته في حال وجوده

الحل: إن التابع $g(x)$ ذات تغير محدود لأن

$$g'(x) = \begin{cases} 1 \; ; & x \in]1,2[\\ 2x \; ; & x \in]2,4[\end{cases}$$

وبما أن:

$$\left.\begin{aligned} |g'(x)| &= 1 \; ; \; x \in]1,2[\\ |g'(x)| &= |2x| \le 8 \; ; \; x \in]2,4[\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|g'(x)| \le 8 \; ; \; \forall x \in]1,4[$$

وبالتالي المشتق محدود وعليه ($g(x)$ ذ.ت.م)

لدينا $g(x)$ ذ.ت.م و $f(x) = x^2$ تابع مستمر على $[1,4]$

وبالتالي نستنتج أن تكامل ستيلتجس موجود

ونحسب قيمة هذا التكامل من العلاقة:

لنختار النقاط $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ نقاط عادية (وهذا ممكن حيث أن كل مجال مهما صغر يحوي عدد غير منته من النقاط العادية والغير عادية)

عندئذ تكون $\varphi(\xi_k) = 1$ ونعوض فيه:

$$S(\mathcal{J}\varphi, g, p) = 18 \sum_{k=1}^{n} 1\cdot(x_k - x_{k-1}) = 18(\sqrt{5})$$

لنختار النقاط $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ نقاط غير عادية فيكون: $\varphi(\xi_k) = 0$

$$S(\mathcal{J}\varphi, g, p) = 18 \sum_{k=1}^{n} 0\cdot(x_k - x_{k-1}) = 0$$

وعندما نأخذ النهاية عندما $\lambda(p) \to 0$ نجد:

$$\lim_{\lambda(p)\to 0} S(\mathcal{J}\varphi, g, p) = \begin{cases} 1 ; & \xi_k \text{ نقاط عادية} \\ 0 ; & \xi_k \text{ نقاط غير عادية} \end{cases}$$

أي أن النهاية غير موجودة وبالتالي التكامل غير موجود

دورة الفصل الثاني 2010/2011

A- لتكن الدالة التالية

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} ; & x \neq 0 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب بين أن هذه الدالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$

الحل: لنوجد $g'(x)$

$$g'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin \frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

(5) $\int_0^8 x^2 \, d g(x) = f(0)[g(0+0)-g(0)]$

$+ f(1)[g(1+0)-g(1-0)] + f(3)[g(3+0)-g(3-0)]$

$+ f(8)[g(8)-g(8-0)]$

$= (0)^2[-(-2)-(-2)] + 1^2[0-(-2)]$

$+ 3^2[2-0] + 8^2[7-2] =$

$= 2 + 18 + 64(5) = 340$

ج- إذا كانت $\varphi(x)$ هي دالة ديرخليه على $[0,\sqrt{5}]$ فناقش فيما إذا كانت الدالة φ قابلة للتكامل بالنسبة للدالة $g(x) = 6x$ على تلك الفترة

الحل: دالة ديرخليه φ هي:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 ; & x \in Q' \cap [0,\sqrt{5}] \\ 1 ; & x \in Q \cap [0,\sqrt{5}] \end{cases}$$

حيث Q مجموعة الأعداد النسبية و $Q' = R \setminus Q$ مجموعة الأعداد غير النسبية

نأخذ التجزئة الاختيارية للمجال $[0,\sqrt{5}]$ وهي:

$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = \sqrt{5}\}$

نشكل مجموع ستيلتجس للدالة 3φ بالنسبة لـ g وفق التجزئة P:

$S(3\varphi, g, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$

$= \sum_{k=1}^{n} 3\varphi(\xi_k)[6(x_k) - 6(x_{k-1})]$

$= 18 \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

حيث ξ_k نقاط اختيارية من المجالات $[x_{k-1}, x_k]$ ، $k=1$

$$|f(x) - f(y)| = |\sin 2x - \sin 2y|$$

$$= \left|2 \cos \frac{2x+2y}{2} \cdot \sin \frac{2x-2y}{2}\right|$$

$$= 2|\cos(x+y)| \cdot |\sin(x-y)|$$

$$\leq 2 \cdot 1 \cdot |\sin(x-y)| \leq 2|x-y| \; ; \; \forall x,y \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2|x-y| \; ; \; \forall x,y \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

حيث نعلم من قوانين تحويل المجموع إلى جداء

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

B- لتكن لدينا الدالة $g(x)$ المعرفة بالعلاقة:

$$g(x) = \begin{cases} -2 \; ; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \; ; & 1 < x \leq 3 \\ 2 \; ; & 3 < x < 8 \\ 7 \; ; & x = 8 \end{cases}$$

والمطلوب: 1- بين أن الدالة $g(x)$ قابلة للمكاملة على $[0, 8]$

2- تأكد من وجود تكامل ستيلتجس $J = (S) = \int_0^8 x^2 \, dg(x)$

ثم احسب قيمته.

الحل: 1- إن الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق باستثناء عدد محدود من النقاط (نقاط الانقطاع) وكذلك $g'(x) = 0$ محدودة وبالتالي فإن $g(x)$ قابلة للمكاملة

(طريقة أخرى بملاحظة أن $g(x)$ تابع متزايد فهو قابل للمكاملة)

2- بما أن $f(x)$ تابع مستمر $f(x) = x^2$ على [illegible]

[illegible]

[illegible]

دورة الفصل الثاني 2011/2012

1- أثبت أن $\pi \sin x = |x|$ ؟ تحقق شروط ليبشتز على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وبرهن الدالة محدودة التغير

نبرهن بالبداية أن: $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R$

نعلم أن $|\sin x| \leq |x| ; \forall x$ إذا كانت $x \geq 2\pi$ ثابت

$|\sin x| \leq 1 < 2\pi \leq x \Rightarrow \sin x \leq x ; \forall x \geq 2\pi$

لندرس تغيرات $f(x) = x - \sin x$ على المجال $[0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 - \cos x , f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi$

x	0		2π
f'	0	+	0
f	0	↗	2π

إذاً يكون $f(x) \geq 0 ; \forall x \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x ; \forall x \in [0, 2\pi]$

وبالتالي يكون $|\sin x| \leq x$ لأن $x \geq 0$

من هذه العلاقة وإذا كان x سالباً يكون $(-x)$ موجب نعوض في العلاقة السابقة بدلاً من x فنجد أن:

$\sin(-x) \leq -x ; \forall x \in R^-$

$-\sin x \leq -x \Rightarrow |\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R^-$

وكذلك $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R^+$

ومنه نجد $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R$

قاعدة هامة: $|\sin \alpha| \leq |\alpha| ; \forall \alpha \in R$

وكذلك: $\ln(1+\alpha) \leq \alpha ; \forall \alpha \in R^+$

[illegible] $[0, \frac{\pi}{2}]$ [illegible]

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2| ; \forall x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

حيث k عدد موجب ما

$$= -2x - 2\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{0} + 2x + 2\operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{3}$$

$$= -2(0) - 2\operatorname{arctg} 0 + 2(-1) + 2\operatorname{arctg}(-1) + 2(3) + 2\operatorname{arctg} 3 - 2(0) - 2\operatorname{arctg} 0$$

$$= -2.(0) - 2 - 2.\frac{\pi}{4} + 6 + 2\operatorname{arctg} 3$$

$$= -2 - \frac{\pi}{2} + 6 + 2\operatorname{arctg} 3$$

$$= 4 - \frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} 3$$

السؤال الثالث: $g_n(x) = (1-x)^n$ حيث $n \geq 1$ ، $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$

1) ايجاد $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ على الفترة $[0,1]$.

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} (1-x)^n = \begin{cases} 0 & x \in]0,1] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

هل تصح العلاقة

$$\textcircled{*} \quad \lim_{n \to \infty} (S)\int_0^1 f(x) . dg_n(x) = (S)\int_0^1 f(x) . dg(x)$$

نجيب أن محققة: $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ ($\arcsin \frac{x}{2}$ مستمرة على $[0,1]$)

و $g_n(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ $\quad V_a^b(g) \leq L$

بالإضافة إلى ذلك g_n متقاربة نقطياً من g .

$n \geq 1$

$n-1 \geq 0$

$$g_n'(x) = n.(1-x)^{n-1}(-1) = -n(1-x)^{n-1}$$

$$g_n' = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0		1
g_n'		—	
g_n	1	↘	0

الدالة g_n متناقصة (مطردة) اي g_n ذات تغير محدود على $[0,1]$

و g_n متقاربة نقطياً من g ،

وبالتالي فالمساواة * صحيحة .

دورة 2010/6/22 ستم الإعداد

السؤال الثالث: بيّن فيما إذا كانت الدالة $f(x)=e^{x}+[x]$ في $[-2,2]$ ؛

1) ذات تغير محدود في $[-2,2]$ وعلل ذلك ؟

لأن الدالة $f(x)$ تكتب في شكل مجموع دالتين محدودتي التغير ⟸ محدودة التغير في $[-2,2]$ لأن

$f_1(x)=e^{x}$ لأنها ذات تغير محدود

$f_1'=e^{x}$; $f_1'>0$

x	-2		$+2$
f_1'		$+$	
f_1	e^{-2}	↗	e^{2}

⟸ f_1 دالة متزايدة في الفترة $[-2,2]$

$f_2(x)=[x]$

هي دالة متزايدة في $[-2,2]$ ومنه ذات تغير محدود في $[-2,2]$.

$$[x]=\begin{cases}-2 & -2\le x<-1\\ -1 & -1\le x<1\\ 1 & 1\le x<0\\ 0 & 0\le x<2\\ 2 & x=2\end{cases}$$

2- احسب تغير الدالة $y_1=e^{x}$ في $[-2,2]$ ؛

$$V_{-2}^{2}(y_1)=y_1\Big|_{2}-y_1\Big|_{-2}=e^{2}-e^{-2}$$

3. تأكد من وجود تكامل ستيلتجس $J=(S)\int_{-1}^{3}|x|\,d(\ln(1+x^2))$ ؟ احسبه.

نلاحظ أن $f(x)=|x|$ هي دالة مستمرة في $[-1,3]$ (إنها مستمرة في أي نقطة ... ومنه ...) نستنتج أن ...

$g(x)=\ln(1+x^2)$; $g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ موجود

$|g'|=\dfrac{2|x|}{|1+x^2|}\le\dfrac{2\cdot 3}{1}=6$ محدود

g' مستمر وبالتالي فهو تكامل ريمان. وبالتالي تكامل ستيلتجس موجود.

$$J=(R)\int_a^b f\cdot g'\,dx=\int_{-1}^{3}|x|\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{3}x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=-2\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx+2\int_{0}^{3}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$=-2\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx+2\int_{0}^{3}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

٥- ... ولا دالة تقفز قفزة ليست تكون مستمرة
ومثال ليكن الدالة وتقفز قفزة البسيطة، إن الدالة g مستمرة في [0,2] "الجهة ..."
مطلقاً ... دالة متغيرة في [0,2] لأن ...
... بوريلية "" بوريلية لا ... مغلقة.
وكل دالة مستمرة في مجموعة مغلقة تكون متغيرة في [0,2].

السؤال الثاني: احسب التكامل $J=\int_0^8 e^x\, dg(x)$

$$g(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x<1\\ 0 & 1<x\le 4\\ 2 & 4<x\le 8\end{cases}$$

إن الدالة $f(x)=e^x$ مستمرة في [0,8]، و $g(x)$ تأخذ قيم ثابتة في الفترات $[0,1], [1,4], [4,8]$

فإن تكامل J ستيلجس موجود.

$$J=f(0)[g(0+0)-g(0)]+f(1)[g(1+0)-g(1-0)]$$
$$+f(4)[g(4+0)-g(4-0)]+f(8)[g(8)-g(8)]$$
$$=e^0[-1-(-1)]+e^1[0+1]+e^4[2-0]+e^8[2-2]$$
$$=0+e+2+0=e+2$$

٢٠١٠.١١١٥ الحل

ما هو التغير الكلي للدالة $g(x)=[x]$ على الفترة [0,3] واحسب التكامل $(S)\int_0^3 e^x\, d[x]$ بعد التأكد من وجوده.

$$V_0^3([x])=[b]-[a]=[3]-[0]=3-0=3$$

إن الدالة $f=e^x$ هي دالة مستمرة في [0,3]. و $[x]$ دالة تأخذ قيماً ثابتة في الفترات [0,3] كما هو موضح كالتالي:

$$[x]=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\\ 3 & x=3\end{cases}$$

إن تكامل ستيلجس موجود.

$$J=f(0)[g(0+0)-g(0)]+f(1)[g(1+0)-g(1-0)]+f(2)[g(2+0)$$
$$-g(2-0)]+f(3)[g(3)-g(3-0)]$$
$$=e^0[0-0]+e[1-0]+e^2[2-1]+e^3[3-2]$$
$$=e+e^2+e^3$$

برهان: g دالة قابلة للاشتقاق على ℝ. ومشتقها:

$$g' = \begin{cases} 2(x-2)\sin\frac{1}{x-2} + (x-2)^2 \cdot \frac{-1}{(x-2)^2}\cos\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

$$g'\Big|_{x=2} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h+2)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h} = 0$$

(صفرية × محدودة)

$$|g'| = \left|2(x-2)\sin\frac{1}{x-2} - \cos\frac{1}{x-2}\right|$$

$$\leq 2|x-2|\left|\sin\frac{1}{x-2}\right| + \left|\cos\frac{1}{x-2}\right|$$

$$\leq 2|x-2| \cdot \frac{1}{|x-2|} + 1 = 2+1 = 3$$

نلاحظ أن المشتقة محدودة فالدالة g مستمرة بانتظام على ℝ وبالتالي حسب المبرهنة السابقة فإن العبارة صحيحة.

دورة 2010/9/20

بيّن أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز في الفترة $[0,2]$ واستنتج أن تكون مستمرة مطلقاً ومتجانسة في تلك الفترة؟ وضح ذلك.

الحل:

شرط ليبشتز: $|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y|$

$$|x - x^2 - y + y^2| = |(y^2 - x^2) + (x-y)| \leq |y^2 - x^2| + |x-y|$$

$$\leq |y-x| \cdot |y+x| + |x-y| = |x-y|(|y+x|+1)$$

$$\leq |x-y|(|y|+|x|+1) \leq |x-y|(2+2+1) = 5|x-y|$$

إذن وجد عدد L=5 يحقق الشرط السابق

السؤال الثالث: $\varphi_n(x)=x\cdot e^{-nx}$ متتالية من الدوال معرفة ع $[1,3]$

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2\sin\frac{1}{x-2} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

1) أوجد $\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}x\cdot e^{-nx}=x\cdot e^{-(\infty)x}=x\cdot e^{-\infty}=x\cdot 0=0$$

2) بين مع التعليل أن المساواة الآتية صحيحة

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^3\varphi_n(x)\,dg(x)=\int_1^3\varphi(x)\cdot dg(x)\quad (*)$$

حسب مبرهنة التقارب المنتظم وتقارب ستيلجس أنه إذا كانت $\varphi_n(x)$ متتالية من الدوال المستمرة ومتقاربة بانتظام من φ ع $[a,b]$ وكانت g دالة ذات تغير محدود ع $[a,b]$ فإنه تتحقق المساواة $(*)$

نلاحظ أن $x\cdot e^{-nx}=\varphi_n(x)$ (عبارة عن دوال مستمرة ع $[1,3]$.

ولنا إثبات التقارب المنتظم.

نوجد $\alpha_n=\sup|\varphi_n-\varphi|\ :\ \forall x\in[1,3]$

فإذا كانت $\alpha_n\to 0$ ($n\to\infty$) كانت φ_n متقاربة بانتظام.

$$\alpha_n=\sup_{x\in[1,3]}|x\cdot e^{-xn}-0|=\sup_{x\in[1,3]}|x\cdot e^{-xn}|=\sup_{x\in[1,3]}x\cdot e^{-xn}$$

$$f'=(x\cdot e^{-xn})'=e^{-xn}+x\cdot(-n)\cdot e^{-xn}=e^{-xn}(1-nx)$$

$$f'=(x\cdot e^{-xn})'=0\Rightarrow nx=1\Rightarrow x=\frac{1}{n}$$

x	0		$\frac{1}{n}$	1	3	∞
f'		$+$	0	$-$		
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$		0

$$\alpha_n=\frac{1}{ne}$$

$$n\to\infty\Rightarrow\alpha_n\to 0$$

وتتقارب φ_n منتظم.

دورة 2010

إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل: $g(x) = c + \int_a^x \phi(t)\,dt$

حيث أن التكامل $\int_a^b |\phi(t)|\,dt$ موجود ومحدود عندها نثبت أن g محدودة التغير في $[a,b]$ ، اعتبر الدالة $g(x)=\mathrm{arctg}\,x$ كما سبقه. ثم بين أن $J=(S)\int_0^{\sqrt3} x^2 d\,\mathrm{arctg}\,x$ موجود واحسبه

الحل: إن الدالة $g(x)=\mathrm{arctg}\,x$ تكتب بالشكل التالي:

$$\mathrm{arctg}\,x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad ; \quad c=0 \quad a=0$$

$$\int_0^{\sqrt3} \left|\frac{1}{1+t^2}\right| dt = \int_0^{\sqrt3} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

حيث $\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}$ دالة غير سالبة مستمرة

$$= \mathrm{arctg}\,t \Big|_0^{\sqrt3} = \mathrm{arctg}\sqrt3 - \mathrm{arctg}\,0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

نلاحظ أن التكامل $\int_a^b |\phi(t)|\,dt$ موجود ومحدود $\Longleftarrow$ g دالة محدودة التغير في الفترة $[0,\sqrt3]$.

وبما أن $f(x)=x^2$ دالة مستمرة في المجال $[0,\sqrt3]$ فإن $J=(S)\int_0^{\sqrt3} x^2 d\,\mathrm{arctg}\,x$ موجود ويتحول إلى ريمان.

$$J = (R)\int_0^{\sqrt3} x^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'} \cdot dx = \int_0^{\sqrt3} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt3} \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x + \mathrm{arctg}\,x \Big|_0^{\sqrt3}$$

$$= \sqrt3 + \frac{\pi}{3} - 0 - 0 = \sqrt3 + \frac{\pi}{3}$$

ملاحظة هامة جداً

$$V_a^b(g) = \int_a^b |\phi(t)|\,dt$$

$$V_0^{\sqrt3}(g) = \int_0^{\sqrt3} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{3}$$

2010/9/12

احسب قيمة التكامل $J = (s)\int_{-1}^{3} x^2 \, dg(x)$ حيث

$$g(x) = \begin{cases} 2x & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 2 \\ 1 - x^2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

x^2 دالة مستمرة على $[-1, 3]$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g = 1 \ne \lim\limits_{x \to 0^-} g = 0 \Rightarrow$ نقطة انقطاع من النوع الأول $c_1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g = 1 - 4 = -3 \ne \lim\limits_{x \to 2^-} g = 1 \Rightarrow$ نقطة انقطاع من النوع الأول $c_2 = 2$

$\Rightarrow \int_{-1}^{3} x^2 \, dg(x)$ موجود

$$J = \int_{-1}^{3} x^2 \cdot g' \cdot dx + f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1)\right]$$
$$+ f(0)\left[g(0+0) - g(0-0)\right] + f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right]$$
$$+ f(3)\left[g(3) - g(3-0)\right]$$

$$g' = \begin{cases} 2 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 < x < 2 \\ -2x & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} 2x^2 \, dx + \int_{0}^{2} x^2 \, 0 \cdot dx + \int_{2}^{3} x^2(-2x)\, dx + 1\left[-2 - (-2)\right]$$
$$+ 0 + 4\left[(1-4) - 1\right] + 9\left[(1-9) - (1-9)\right]$$

$$= 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} - 2\,\frac{x^4}{4}\Big|_{2}^{3} + 4(-3-1)$$

$$= \frac{2}{3}(0+1) - \frac{2}{4}(3^4 - 2^4) - 16$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(81 - 16) - 16$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{81}{2} + \frac{16}{2} - 16$$

$$= -\frac{81}{2} - 8 + \frac{2}{3} = \frac{-81(3) - 48 + 4}{6} = \frac{-243 - 44}{6}$$

$$= \frac{-287}{6}$$

إذا كانت $f_1 = e^x$ معرفة في $[0,2]$ احسب $(5) \int_0^2 f_1(x)\, d\varphi(x)$

حيث الشكل المرسوم.

نبين $f_1 = e^x$ دالة مستمرة في المجال $[0,2]$

$$\lim_{x\to 1^-}\psi = 1 \neq \lim_{x\to 1^+}\varphi = 1+3=4$$

أي أن $a=1$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة ψ.

وبالتالي حسب الاختبار [5] عملية ستيلتجس موجودة.

$J=\int_a^b f_1\, d\varphi$ ، f_1 مستمرة في $[a,b]$

φ تحتوي نقاط انقطاع من النوع الأول.

$\Leftarrow$ J موجود

$$J=\int_a^b f_1\cdot\varphi'\cdot dx + f_1(a)[\varphi(a+0)-\varphi(a)] + f_1(c)[\varphi(c+0)-\varphi(c-0)] + f_1(b)[\varphi(b)-\varphi(b-0)]$$

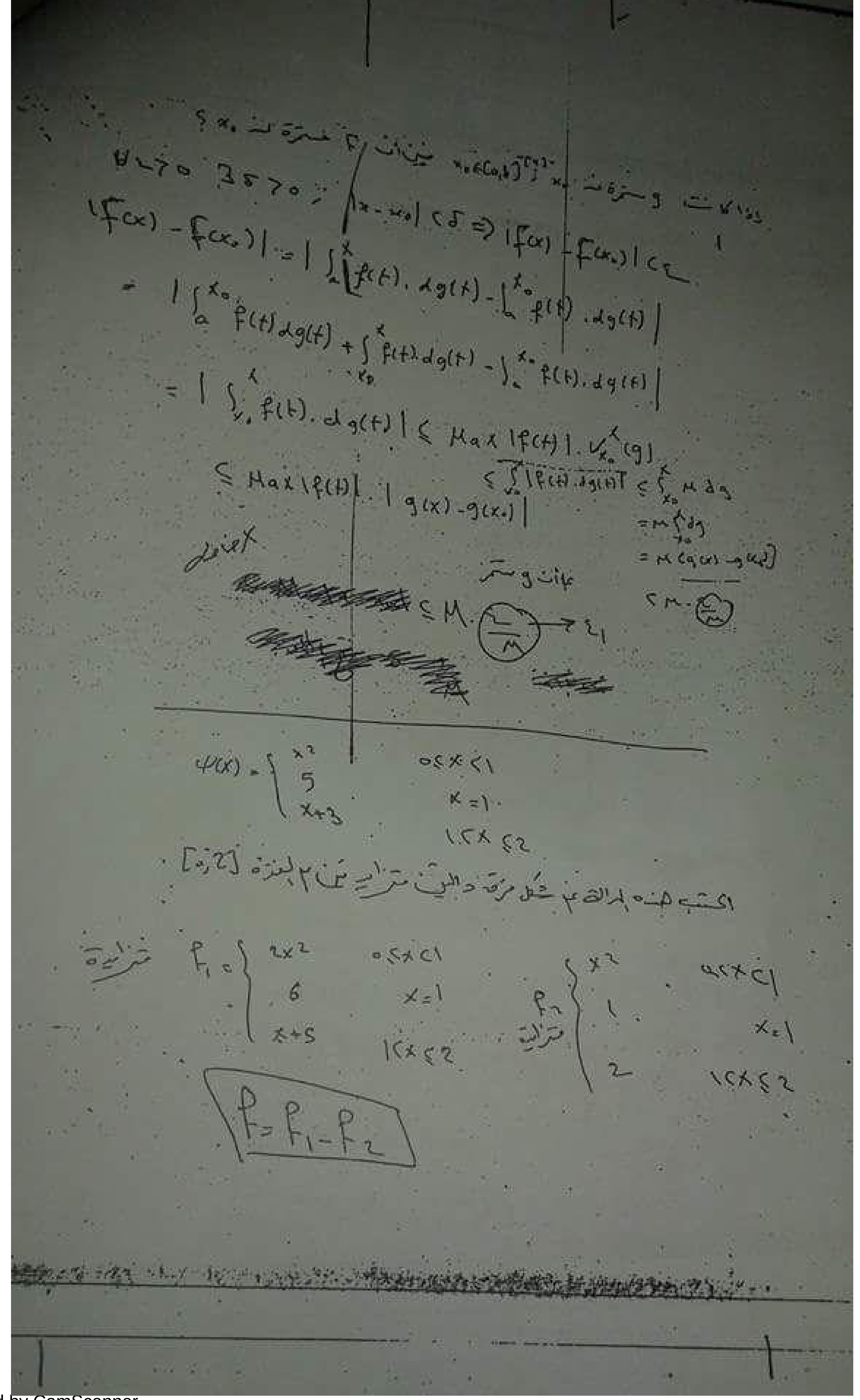
$$=\int_0^2 e^x\,\varphi'\,dx + f_1(0)[\varphi(0+0)-\varphi(0)] + f_1(1)[\varphi(1+0)-\varphi(1-0)] + f_1(2)[\varphi(2)-\varphi(2-0)]$$

$$\varphi' = \begin{cases} 2x & 0\le x<1 \\ 1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

$$J=\int_0^1 2e^x x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + e^0[0^2-0^2] + e[(1+3)-1^2] + e^2[(2+3)-(2+3)] = 2e^x(x-1)\Big|_0^1 + e^x\Big|_1^2$$

$$+e[4-1] = 2[e(0)-e^0(-1)] + [e^2-e^1] + 3e = 2[+1] + e^2 - e + 3e$$

$$= 2 + e^2 + 2e$$



بين أن F مستمرة عند x_0 ؟ $x_0 \in [a,b]$ إذا كانت g مستمرة عند x_0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ; \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\,dg(t) - \int_a^{x_0} f(t)\,dg(t) \right|$$

$$= \left| \int_a^{x_0} f(t)\,dg(t) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dg(t) - \int_a^{x_0} f(t)\,dg(t) \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dg(t) \right| \leq \operatorname{Max}|f(t)| \cdot V_{x_0}^{x}(g)$$

$$\leq \operatorname{Max}|f(t)| \cdot |g(x) - g(x_0)|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t)\,dg(t)| \leq \int_{x_0}^{x} M\,dg = M \int_{x_0}^{x} dg = M\,(g(x) - g(x_0)) \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

لأن g مستمرة

$\leq M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \to \varepsilon_1$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين تزايديتين على الفترة $[0,2]$.

تزايدية
$$f_1 = \begin{cases} 2x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 6 & x = 1 \\ x+5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

تزايدية
$$f_2 = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f = f_1 - f_2$$

ص: هل $\int_0^2 f\,d\phi$ موجود؟ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2 & x=1 \\ x+1 & 1<x\le 2 \end{cases} \qquad \phi(x)=[x]$$

إن الدالة f غير مستمرة عند 1 لأن

$$\lim_{x\to 1^-} f = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

وبالتالي فإن $\int_0^2 f\,d\phi$ غير موجود.

دورة ٢٠٠٩ / ٢٠١٠ — ٢٠١٠/٨/٣٠

إذا كانت g دالة محدودة التغير و f دالة مستمرة على $[a,b]$. ولتكن

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dg(t).$$

ق: أثبت أن $F(x)$ هي دالة ذات ت. م على $[a,b]$.

الحل: لنثبت أن $V(F,T)$ محدودة من الأعلى من أجل أي تجزئة اختيارية

$$T=\{x_0=a,\dots,x_n=b\}$$

$$V(F,T)=\sum_{k=1}^{n}|F(x_{k-1})-F(x_k)| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_a^{x_{k-1}} f(t)\,dg(t) - \int_a^{x_k} f(t)\,dg(t)\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dg(t)\right| \le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\,|dg(t)|$$

إن f دالة مستمرة على $[a,b]$ كدالة ريمان ⇐ f محدودة ⇐ $\exists M>0;\ |f|\le M$

$$\Rightarrow\ \le \sum_{k=1}^{n} M\,|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})| \le M\,V(g,T)$$

$$\le M\,\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

وبالتالي فإن $F(x)$ دالة ذات ت. م على $[a,b]$.

$f_1 = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$ [x]

$f_2 = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

هل لدينا إذا كانت $\int_{-1}^{4} f_1 \, d f_2$ موجود

$f_1 = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \le 4 \end{cases}$

$f_2 = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \le 4 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} f_1 = 1 \quad \lim_{x \to 0^+} f_1 = 1$

$f(0) = 5$ ولكن

$\lim_{x \to 0^-} f_2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} f_2$

ولكن $f_2(0) = 3$

إذن f_1, f_2 غير مستمرتين عند $x = 0$

والتكامل غير موجود.

2011/1/17 دورة

احسب قيمة التكامل $\int_0^{\pi} |x| \, d\cos x$ بعد التأكد من وجوده.

$f(x) = |x|$

مستمرة ⇐ كمول ريمان

$[0, \pi]$ ع

$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0$

$f(x_0) = |x_0| = x_0$

مستمرة $\forall x_0 \in [0, \pi]$

$g(x) = \cos x$

$g'(x) = -\sin x$

$|g'| = |\sin x|$

$\le |x| \le \pi$

إذن g محدود.

وبما أن $g'(x) = -\sin x$ مستمر ⇐ g كمول ريمان.

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f \, dg$ موجود

$\int_0^{\pi} f \, dg = \int_0^{\pi} |x| \, d\cos x = \int_0^{\pi} -|x| \sin x \, dx$

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -[x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x \, dx$ ...

$= -[\pi(-1)] - [\sin x]_0^{\pi}$

NOUR Al-...

2012 (1)

$g(x) = \sin^4(x) + \cos^4 x$ ، $[0, \pi]$ أوجد التغير الكلي للدالة

$g'(x) = 4\sin^3 x[\cos x] + 4\cos^3 x[-\sin x]$

$= 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \sin^3 x\cos x - \cos^3 x \sin x = 0 \Rightarrow$

$\cos x \sin x[\sin^2 x - \cos^2 x] = 0 \Rightarrow \cos x \sin x = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$

$k = 0 \Rightarrow x = 0$; $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $k = 2 \Rightarrow x = \pi$

$g(0) = \sin^4(0) + \cos^4(0) = 0 + 1 = 1$

$g(\frac{\pi}{2}) = \sin^4\frac{\pi}{2} + \cos^4\frac{\pi}{2} = 1$; $g(\pi) = \sin^4\pi + \cos^4\pi = (-1)^4 = 1$

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow -\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\cos 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$; $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$; $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$g(\frac{\pi}{4}) = (\sin\frac{\pi}{4})^4 + (\cos\frac{\pi}{4})^4 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} =$

$\frac{(\sqrt{2})^4}{2^3} = \frac{(2^{\frac{1}{2}})^4}{8} = \frac{2^2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$g(\frac{3\pi}{4}) = (\sin\frac{3\pi}{4})^4 + (\cos\frac{3\pi}{4})^4$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow g(\frac{3\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = \frac{1}{2}$

$V_0^{\pi}(g) = V_0^{\frac{\pi}{4}}(g) + V_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(g) + V_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(g) + V_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}(g)$

$= |g(\frac{\pi}{4}) - g(0)| + |g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{4})| + |g(\frac{3\pi}{4}) - g(\frac{\pi}{2})|$

$+ |g(\pi) - g(\frac{3\pi}{4})| = |\frac{1}{2} - 1| + |1 - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - 1| + |1 - \frac{1}{2}| = 2$

جامعة البعث — امتحان مقرر الدوال محدودة التغير — اسم الطالب :

كلية العلوم — للفصل الأول للعام 2014/2013 — الدرجة : 100

قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات — المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول (33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذ ت م على الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) – ناقش مع التوضيح ، فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$ – مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) – أوضح أن الدالة $y = \sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي.

السؤال الثاني (34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$ فأثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة .

(ب) – بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A \subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم احسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) – أعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة لـ g ، بينما التكامل $\int_a^b f\, dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي $K = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, d x^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث (33 د): (أ) – بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad ; \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad , \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n} \quad \text{حيث} \quad x \in]0,1[$$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب) – إذا كانت $X = \mathbb{N}$ و الدالة $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ حيث $A \in P(N)$ و $\mu(\phi) = 0$ و $\alpha_n = \frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، والمطلوب:

1– بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2– احسب قياسات المجموعات : $\mathbb{N}$ ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ ،

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فأثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x \in E : f(x) = -\infty\}$, $\{x \in E : f(x) = \infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12 — مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح — مدرس المقرر: د.محمد عامر

توزيع درجات مقرر الدوال المحدودة التغير

جامعة ... / كلية العلوم / قسم الرياضيات

الدور الأول للدور ... $\frac{2013}{2014}$ — السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة: 100

السؤال الأول (33 درجة) P_1) لنبين أن دالة ديرشليه ليست ذات تغير محدود في الفترة المعطاة $[\sqrt{2}, 5]$ وذلك بتجزئة هذه الفترة بواسطة نقاط ... بحيث تكون نقاط التجزئة ... ماعدا ... ثم نعرف دالة ديرشليه بالصيغة:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in \bar{Q} = R - Q \end{cases}$$

ومنه:

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = n$$

حيث n عدد صحيح ... بالتالي نستنتج أنه من أجل أي عدد موجب M مهما كان كبيراً عند اختيار تجزئة للفترة $[\sqrt{2}, 5]$ تحوي عدداً صحيحاً n كبيراً بالقدر الكافي بحيث أن:

$$V(\varphi, P) = n > M \Rightarrow \bigvee_{\sqrt{2}}^{5}(\varphi) = \infty$$

- إثبات أن $\varphi(x) \overset{a.e.}{=} 0$ بالشكل: في أي فترة ... الصفر ... المعرفة ماعدا على فترة (أي مجموعة) ... لأن الدالة ... للإشارة إلى ... [illegible] $[\sqrt{2}, 5]$ ... الأعداد النسبية مستمرة في هذه الفترة ...

ب) دالة الجزء الصحيح $E(x) = [x]$ لا نعلم أنها مستمرة في الفترة $[0, 9]$ ... مستمرة تقريباً في كل مكان لأن قياس مجموعة النقاط التي ليست ... عدد ... [illegible] لذا فهي محدودة ... [illegible] ... على الفترة محدودة ...

- ... [illegible] ... $\lambda(Q) = 0$ ...

ج) نثبت ... التعريف للاستمرار المطلق ... $f(y) = \sqrt{y}$ على $[0, 1]$ ... $y^{\frac{1}{2}}$ محدودة ...

كما ... $\epsilon > 0$ ... $\delta > 0$ ... $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ ... $[a, b]$ ...

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

- لا ... [illegible] ... $\sqrt{|y| - 1}$ ...

السؤال الثاني (30٪)

ا) لو f محدودة التغير على $[a,b]$ ، P_1 تجزئة لـ $[a,b]$ [illegible] f^2 [illegible]

$$V(f^2; P_1) = \sum_{k=1}^{n} |f^2(x_k) - f^2(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,|f(x_k) + f(x_{k-1})|$$

$$\le 2k \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = 2k\, V(f, P_1)$$

f^2 م ت على $[a,b]$ ، [illegible]

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E; & c < 0 \\ E(|f| > \sqrt{c}) \cup \ldots \sqrt{c} & \end{cases} \qquad c \in R$$

[illegible] الطرف الأيمن [illegible] مجموعة قياسية

- دالة [illegible] f على $[a,b]$ [illegible]

اذا [illegible]

$$V_f(a) = 0$$

$$V_f(y) = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad a < y \le b$$

$[a,y]$ [illegible] محدودة - تزايدية - [illegible] - مستمرة

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E; & c < 0 \\ A; & 0 \le c < 1 \\ \phi; & c \ge 1 \end{cases} \quad ; \forall c \in R$$

اذا الدالة قياسية [illegible] الطرف الأيمن [illegible] مجموعات قياسية [illegible] c

$$\int_{E=[0,1]} I_A(x)\, d\lambda = \int_A + \int_{E-A} = \lambda(E)$$

(ـه) - مثال [illegible] $g(x) = x$ [illegible] $E=[0,1]$ [illegible] محدودة [illegible] على $[a,b]$ [illegible]

$$f = \begin{cases} 1 & ; \; x \in [a,b] \cap Q \\ -1 & ; \; x \in [a,b] \cap \bar{Q} \end{cases} \Rightarrow |f| = 1 \;,\; x \in [a,b]$$

[illegible] $(|f|)$ [illegible] g [illegible]

- [illegible] على $[a,b]$ [illegible]

$$K = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$x = \pi - t$ ، t من π إلى 0 [illegible]

$$K = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt = \frac{\pi^2}{4}$$

4

10

10

انتهى

(د)

السؤال الثالث (33 د) ، P_1 ، ... لدالة f ، ... [illegible]

... $]0,1[$ ... [illegible]

... $f_2 = \frac{1}{1+x}$ ... [illegible]

... $[0, \frac{1}{2}]$.

- شرط ... [illegible]

(5)

$$|f_2(y) - f_2(x)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \le (1)(1)\,|x-y| = |x-y|$$

> 0

أي تحقق الشرط ... $L = 1$ ... [illegible] $[0, \frac{1}{2}]$ كما بينا سابقا .

(ب) ... $\mu(\phi) = 0$ ... [illegible]

... $P(N)$ ... [illegible] $\mu(X) = \mu(N) = \sum_{n \in N} \frac{1}{n}$

... $\frac{1}{n}$ ... n ... [illegible] $\mu(X) < \infty$

- $\mu(N) = \infty$, $\mu(\{25\}) = \frac{1}{25}$, $\mu(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$

(17)

- ... f ... E ... [illegible] $E(f = \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n)$

... [illegible]

$E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n)$

... [illegible]

- مثال ... R ... [illegible]

... [illegible]

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الثالث للعام 2013 /2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(35 درجة): (أ) – إذا كان للدالة f مشتقاً محدوداً على الفترة $[a,b]$ (المغلقة و المحدودة في جميع الأسئلة) ، فأثبت أنها تكون ذ ت م ، ثم استنتج أنها قيوسة عليها.

- بين أن الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ذ ت م على $[0,2]$ ، وناقش هل يلزم كون مشتقها محدوداً على هذه الفترة أن تكون ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي على نفس الفترة.

(ب) –ادرس الاستمرار المطلق للدالة: $g(x)=\dfrac{1}{x}$ على الفترة $[1,3]$ و كذلك المحدودية تقريباً لها في كل مكان على $\Re$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على تلك الفترة.

السؤال الثاني(30 درجة): (أ) –إذا كانت $S_k\,(k=1,2,...)$ أسرة من الجبور التامة في $X\neq\phi$ ، فأثبت أن $S=\bigcap\limits_k S_k$ جبراً تاماً في X .

– ابحث مع التعليل في كون صف المجموعات المحدودة في $\Re$ ، جبر ، جبر تام ؟

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq[a,b]$ (حيث A مقيسة من هذه الفترة) كمولة لوبيغياً على الفترة $[a,b]$ ، ثم احسبه(أي: $(L)\int\limits_{[a,b]} I_A(x)\,d\lambda=$) .

السؤال الثالث(35 درجة): (أ) –أحسب التغير الكلي للدالة على الفترة $[0,10]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2 & ;\ 0\le x\le 1\\ 0 & ;\ 1<x\le 3\\ 2 & ;\ 3<x<10\\ 5 & ;\ x=10\end{cases}$$

ثم أحسب التكامل الآتي علماً أنه موجوداً :

$$J=(S)\int_0^{10}x^2\,d\varphi(x)$$

(ب) –إذا كان $\lambda(E)=0$ ، عندئذ أثبت أن كل دالة h معرفة على E تكون قيوسة عليها .

-علل هل المجموعة Q بوريلية و مقيسة ؟ و ما هو قياس لبيغ للمجموعات : $]5,6[$, Q , $\{2014\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2014/8/19

مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير

الدورة الإضافية للعام $\frac{2013}{2014}$ الدرجة: 100

سنة ثالثة - رياضيات

السؤال الأول (35°)

أ) لدينا : $x \in [a,b]$ ($x \in]a,b[$) ; $|f'(x)| \leq L$ $(L>0)$

الدالة مستمرة على $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ وحسب لاغرانج توجد نقطة $z \in (x_1, x_2)$ بحيث يكون

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$$

وبالتالي نحصل على $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(z)||x_2 - x_1| \leq L|x_2 - x_1|$$

وهذا يعني أنها تحقق شرط ليبشيتز $L>0$ على $[a,b]$ وحسب مبرهنة تكون ذات تغير محدود.

- ولكن العكس غير صحيح بحيث أنه توجد دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ومشتقها غير محدود (أي الكلام لا يتحقق)

* مثال $f(x) = \sqrt[5]{x}$ متزايدة تماماً حسب تعريف (التزايد تماماً) على $[0,2]$

فهي ذات تغير محدود حسب مبرهنة ويكون

$$V_0^2(\sqrt[5]{x}) = \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{0} = \sqrt[5]{2} > 0$$

- لكن مشتقها على الفترة $[0,2]$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} x^{-\frac{2}{5}} & ; x \in]0,2] \\ \infty & ; x = 0 \end{cases}$$

وهذا يعني أن المشتق ليس محدوداً بجوار الصفر (المشتق لا نهائي) ، ومع ذلك فإنها ذات تغير محدود.

أي أنه لا يلزم أن يكون المشتق محدوداً لتكون ذات تغير محدود.

ب) الاستمرار المطلق لـ g ، لدينا $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ على $]1,3[$ أو $[1,3]$ وهي محدودة

$|g'(x)| \leq \frac{1}{1} = 1$ أي كان $x \in [1,3]$ ، وهذا يعني أنها تحقق شرط ليبشيتز وبالتالي مستمرة مطلقاً على $[1,3]$

محدودة تقريباً على $\mathbb{R}$ ، ثم هي محدودة تقريباً على $\mathbb{R}$ لأنها محدودة في المجموعة $\{0\}$

وإن قياسها حسب ليبيغ (أي $\lambda(\{0\}) = 0$)

دالة التغير لها : الدالة g متناقصة تماماً على $[1,3]$ لأن مستمرة ذات تغير على $[1,3]$ ، والمطلوب :

$$V_g(x) = \begin{cases} V_1^x(g) & ; 1 < x \leq 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1^x(g) = \sup_p \{g(1) - g(x)\} = \sup_p \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$V_g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & ; 1 < x \leq 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$ دالة التغير المنشورة.

يتبع ←

السؤال الثاني (30°) / أ) عملياً سنبرهن أن $S=\bigcap_k S_k$ جبر σ في X.

لنبرهن تحقق الشروط: حيث أن $\phi, X \in S_k$ ولذلك $\in \bigcap_k S_k$ ($k=1,2,\dots$) وشرط (1)

حيث أن $E_1, E_2, \dots \in S_k$ (جبر σ) ولذلك $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S_k$ وبالتالي $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \bigcap_k S_k$ والشرط (2) محقق.

أي إذا كان $E \in S_k$ فإن $\tilde{E} \in S_k$ وبالتالي $E \in \bigcap_k S_k$ فإن $\tilde{E} \in \bigcap_k S_k$

حيث $\tilde{E} = X - E$.

والشرط (3) محقق وهذا يعني أن S جبر σ في X.

(17)

- صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ هل هي جبر أم جبر σ أم ماذا؟.

نذكر أن ϕ محدودة في $\mathbb{R}$ لأنها محدودة في أي فترة، ولكن $X=\mathbb{R}$ ليست محدودة، وهذا يعني أن صف المجموعات المحدودة ليست جبراً لأن $\mathbb{R} \notin$ هذا الصف لأنه ليس مغلقاً بالنسبة للمتمم (التتمة) أي أن الشرط الأول لم يتحقق.

- وبالتالي لا يمكن أن يكون جبراً تاماً لأنه لو كان جبراً تاماً لكان ... $\mathbb{R}$ وهذا تناقض.

رابعاً) الدالة المميزة ...

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \in \tilde{A} \end{cases} \quad ; \quad \tilde{A} = E - A = [a,b] - A$$

- قابلية القياس: بما أن A قابلة للقياس على $[a,b]$. في الحقيقة لدينا:

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E=[a,b] & ; c<0 \\ A & ; 0 \leq c < 1 \\ \phi & ; c \geq 1 \end{cases}$$

(13)

إذاً المجموعة $E(I_A > c)$ قابلة للقياس أياً كان c في $\mathbb{R}$، وهذا يعني أن الدالة المميزة لـ A قابلة للقياس على $[a,b]$.

- محدودة: إنها محدودة لأن $|I_A(x)| \leq 1 \quad ; x \in [a,b]$

والمجال $[a,b]$ محدود وقياسه هو: $\lambda([a,b]) = b-a < \infty$

وهذا يعني أن تكامل ليبغ لا موجود على $[a,b]$، وليس له ...

$$(L)\int_{[a,b]} I_A(x)\, d\lambda = \int_A I_A(x)\, d\lambda + \int_{\tilde{A}} I_A(x)\, d\lambda = \int_A 1 \cdot d\lambda + \int_{\tilde{A}} 0\, d\lambda$$

$$= \lambda(A).$$

وهو المطلوب.

السؤال الثالث (35°)

(أ) حساب التغاير الكلي لـ φ على $[0,10]$:

$$\overset{10}{\underset{0}{V}}(\varphi) = |\varphi(0+0)-\varphi(0)| + |\varphi(1)-\varphi(1-0)| + |\varphi(1+0)-\varphi(1)| + |\varphi(3)-\varphi(3-0)| + |\varphi(3+0)-\varphi(3)| + |\varphi(10)-\varphi(10-0)|$$

$$= |0| + |-2+2| + |0+2| + |0-0| + |2-0| + |5-2|$$

$$= 0+0+2+0+2+3 = 7$$

حيث النقاط $c_1=1$ ، $c_2=3$ نقاط انقطاع من النوع الأول والدالة بذلك ذات تغاير محدود على $[0,10]$ ، $0<1<3<10$

(ب) حساب التكامل لكونه موجوداً. $f(x)=x^2$

$$I = (S)\int_0^{10} x^2 \, d\varphi(x) = f(0)[\varphi(0+0)-\varphi(0)] + f(1)[\varphi(1+0)-\varphi(1-0)] + f(3)[\varphi(3+0)-\varphi(3-0)] + f(10)[\varphi(10)-\varphi(10-0)]$$

$$= 0[-2+2] + 1[0+2] + 9[2-0] + 100[5-2] = 2+18+300 = 320$$

(20)

ج- إثبات h قيوسية على E ، $\lambda(E)=0$ ، E مقيسة ،

طالما $E(h>c) \subseteq E \underset{\text{بالتالي}}{\Rightarrow} \lambda\{E(h>c)\} \le \lambda(E)=0$

ومنه نجد $\lambda\{E(h>c)\}=0$ ، ومن اكتمال القياس فإن المجموعة مقيسة $\forall c$

ومن تعريف الدالة المقيسة نجد أن h دالة قيوسية على E حيث $\lambda(E)=0$.

(15)

د- Q بوريلية ومقيسة؛ لأنها مجموعة قابلة للعد وهي اتحاد قابل للعد من المجموعات أحادية العنصر $Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}$ وأحادية العنصر بوريلية ومقيسة (أي $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}$)

للقياس: $\lambda(\{2014\})=0$ ، $\lambda(Q)=0$ ، $\lambda([5,6[)=6-5=1$

التاريخ ١٩/٨/٢٠١٤م   الأستاذ المشرف

أستاذ المقرر

د. محمد عامر

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك :   **(تمنع الآلة الحاسبة)**

السؤال الأول(35 درجة): (أ) – إذا كان للدالة f مشتقاً محدوداً على الفترة $[a,b]$ (المغلقة و المحدودة في جميع الأسئلة) ، فأثبت أنها تكون ذ ت م ، ثم استنتج أنها قيوسة عليها.

- بين أن الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ذ ت م على $[0,2]$ ، وناقش هل يلزم كون مشتقها محدوداً على هذه الفترة أن تكون ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي على نفس الفترة.

(ب) –ادرس الاستمرار المطلق للدالة: $g(x)=\dfrac{1}{x}$ على الفترة $[1,3]$ و كذلك المحدودية تقريباً لها في كل مكان على $\Re$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على تلك الفترة.

السؤال الثاني(30 درجة): (أ) –إذا كانت $S_k\,(k=1,2,...)$ أسرة من الجبور التامة في $X\neq\phi$ ، فأثبت أن $S=\bigcap_k S_k$ جبراً تاماً في X .

- ابحث مع التعليل في كون صف المجموعات المحدودة في $\Re$ ، جبر ، جبر تام ؟

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq[a,b]$ (حيث A مقيسة من هذه الفترة) كمولة لوبيغياً على الفترة $[a,b]$ ، ثم أحسبه(أي: $(L)\int_{[a,b]} I_A(x)d\lambda=$) .

السؤال الثالث(35 درجة): (أ) –أحسب التغير الكلي للدالة على الفترة $[0,10]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2 & ; \quad 0\le x\le 1\\ 0 & ; \quad 1< x\le 3\\ 2 & ; \quad 3< x<10\\ 5 & ; \quad x=10\end{cases}$$

ثم أحسب التكامل الآتي علماً أنه موجوداً :

$$J=(S)\int_0^{10} x^2\, d\varphi(x)$$

(ب) –إذا كان $\lambda(E)=0$ ، عندئذ أثبت أن كل دالة h معرفة على E تكون قيوسة عليها .

-علل هل المجموعة Q بوريلية و مقيسة ؟ و ما هو قياس ليبغ للمجموعات : $]5,6[\,,\,Q\,,\,\{2014\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2014/8/19

مدرس المقرر: د.محمد عامر

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(50 درجة): (أ) – إذا كانت f دالة ذ ت م على $[a,b]$،فأثبت باستخدام التعريف أن كلاً من الدالتين: $|f|$ ، $(-f)$ ذ ت م على نفس الفترة ، مع ذكر التغير الكلي لواحدة منهما على $[a,b]$.

(ب) –1- اكتب صيغة الدالة : λ^* ،و منه أوضح أن قياس المجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ يساوي الصفر وفق λ^* هذه ، و استنتج أنها مقيسة .

2-أثبت أن الدالة : $\mu(E)=0$ هي قياساً متزايداً على الجبر التام S على X غير الخالية (بعد ذكر شروط القياس)، و ادرسه من حيث أنه : منته ، σ - منته و لماذا ؟ .

(ج) –تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي:

$$J=(S)\int_0^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)d\left([x]+3\right)$$

ثم احسبه في حال وجوده .

السؤال الثاني(50 درجة): (أ) – لتكن f دالة كمولة ريمانياً على$[a,b]$ ، فأثبت أن الدالة :

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,;\,x\in[a,b]$ مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ باستخدام التعريف .

(ب) –1- علل فيما إذا كانت الدالة : $h(x)=\arctan 3x$ تحقق شرط ليبشتز على $[1,4]$ ، و ماذا نعني بقياس ليبيغ على $\Re$ ، و ما هو قياس ليبيغ لكل من المجموعات : $\{9\}$ ، $\Re-N$ ، $\Re$.

2- هل الصف : $A=\{\phi,\Re,]-\infty,0]\,,\,]0,\infty[\,\}$ جبراً تاماً- صفاً مطرداً ؟ و لماذا ؟ .

(ت) - ابحث في وجود تكامل ليبيغ لدالة ديريخليه على الفترة $[2,\sqrt{7}]$ (بعد كتابة صيغتها) بدون حساب .

- اثبت أن متتالية الدوال : $f_n(x)=x^n\;,\;n\geq 1$ متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة $[0,1]$من دالة يطلب تعيينها .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2014/6/25 - مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول للعام 2013/ 2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذت م على الفترة $[\sqrt{2},5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) –ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$ – مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) –أوضح أن الدالة $y=\sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ذت م ، و ما هو تغيرها الكلي .

السؤال الثاني(34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$ ،فأثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة ،

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم احسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) – اعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g -دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة ل g ، بينما التكامل: $\int_a^b f\,dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي: $K=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د): (أ) –بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n[(1+x)e]^{-n}$ حيث $x\in]0,1[$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)–إذا كانت $X=\mathbb{N}$ والدالة $\mu(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ حيث $A\in P(N)$ و $\mu(\phi)=0$ و $\alpha_n=\frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، و المطلوب:

1–بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2–احسب قياسات المجموعات : N ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ ،

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فأثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x\in E: f(x)=-\infty\}$, $\{x\in E: f(x)=\infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: د.محمد بن عامر

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث ـ كلية العلوم

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الثاني – سنة ثالثة / رياضيات
العام الدراسي (2012 - 2013)

الدرجة: 100
مدة الامتحان: ساعتان

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أنّ f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة .....)) وماهي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $f(x)=\sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ الدالة :

$$F(x)=\int_a^x f(u)dg(u) \quad ; x\in[a,b] \ ,F(a)=0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قيوسة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;x=0\\ x^2\sin\dfrac{\pi}{x^2} & ;0<x\le 2\end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب ليبيغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J=\int_0^3 \arctan x \ d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذٍ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منتهٍ ، σ- منتهٍ – ثم وضح أنّ قياس ليبيغ λ في المجموعة R هو σ- منتهٍ من أجل المجموعات :

$$E_n=[-n,-n+1[\ \cup\ [n-1,n[\quad ;n=1,2,\dots$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A}=\{\{x\}\ ;\ x\in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتبولوجيا ؟

- بيّن أنّ كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بيّن فيما إذا كانت المجموعة :

$$I=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x\ ;\ \frac{1}{k+1}\le x<\frac{1}{k}\right\}$$

مقيسة حسب مفهوم ليبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

حمص في 2013/6/11

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

السؤال الأول : (50)

(أ) إذا كانت الدالة g ذ ت م على الفترة [a, b] (حيث a , b حقيقيان ومحدودان)، **فاثبت** أنّ الدالة $I(x) = \sin(g(x))$ ذ ت م على نفس الفترة ، طبعاً باستخدام التعريف.

(ب) اعتماداً على فكرة تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$ ، **والمطلوب:** بيّن فيما إذا كانت دالة ديريخليه φ المعطاة على الفترة $[\sqrt{2}, 4]$ كمولة أم لا بالنسبة للدالة : $g(x) = x + 5$ على نفس الفترة ؟ مع التعليل ؟

- لتكن الآن الدالة : $F(x) = (8 - x^2)[1 - \varphi(x)] \quad ; \quad x \in [\sqrt{2}, 4]$ حيث φ دالة ديريخليه السابقة. **يطلب منك:**

1. إثبات أنّ F دالة قيوسة بعد إثبات أنّ φ قيوسة على نفس الفترة المفروضة.
2. أوضح هل الدالة F محدودة تقريباً في كل مكان على $[\sqrt{2}, 4]$ ؟ ولماذا ؟

(ت) بيّن من أجل المتتالية $\alpha_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ ، أنه تصح المساواة التالية :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(\alpha_n)\right)$$

مع أنّ μ قياس منتهٍ على الجبر التام S.

(ث) هل المجموعة :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[7n, 7n + \frac{1}{\ln n}\right] - Q$$

مقيسة أياً كانت $n \geq 1$ ، وفي حالة الإيجاب ، ما هو قياسها $\lambda(A)$ ، ثمّ أضف ، أوجد $\lambda(R)$ ، $\lambda(\{-2\})$ ، $\lambda([0,1[)$.

(ج) إذا كانت الدالة f معرّفة على المجموعة E ذات القياس المعدوم (حسب ليبيغ) ، فاثبت أنّ هذه الدالة قيوسة عليها. ثمّ إذا كانت E و F مقيستان ، فهل $E\Delta F$ مقيسة ؟ مع توضيح السبب !

السؤال الثاني : (50)

(1) اكتب نص المبرهنة الخاصة بحساب تكامل ستيلجس وذلك في حال كانت f مستمرة و g تأخذ قيماً ثابتة على [a, b].

(2) إذا كانت $f \in C_{[0,1]}$ ($C_{[0,1]}$ فضاء الدّوال المستمرة على [0,1]) ، كما نعلم ليس بالضرورة أن تكون دالة ما من هذا الصف ذ ت م على [0,1] ، فبيّن ذلك بمثال توضيحي من عندك مع الإثبات وما هو التغير الكلي لهذه الدالة على نفس الفترة ، وكتابة الواجب إضافته لتكون الدالة المطردة بتزايد على R ذ ت م عليها.

(3) لتكن μ قياس على الجبر التام S ، ولتكن $A \in S$ مجموعة ما مثبتة ، وأضف أنّ $0 < \mu(A) < \infty$ ، ولنضع من أجل $A \in S$ العلاقة :

$$\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \qquad ; \qquad B \in S$$

بيّن فيما إذا كانت δ المعرّفة بهذه العلاقة تشكل قياساً على S ، وهل هو منتهٍ - σ - منتهٍ ؟ مع التعليل ؟

(4) بعد التأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_1^3 f(x)\, d\, h(x)$$

حيث :

$$f(x) = x^2 \qquad , \qquad h(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 6 & ; \quad x = 2 \\ x^2 & ; \quad 2 < x < 3 \\ 19 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

ثمّ أحسب قيمته بعدئذٍ.

(5) علل ، فيما إذا كانت الدالة: $\psi(x) = x^2 + 10$ تحقق شرط ليبيشتز على الفترة [2, 5] ، وهل يمكن لدالة الصحيح أن تكون مستمرة مطلقاً – ذ ت م على الفترة [0, 10] واحسب تغيرها الكلي على هذه الفترة؟

أجب عن الاسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في أجابتك :　　　　(تمنع الحاسبات)

السؤال الأول : (30°)

١. إذا كانت الدالة f مطردة على الفترة [a , b] فاثبت أنها ذ ت م مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، وهل يمكن للدالة $f(x)=e^{x}$ أن تكون ذ ت م على الفترة] $+\infty$, 0]_مع التعليل ؟

٢. ليكن $\mu^{*}(E)=0$, والمطلوب : إثبات أن المجموعة E تكون مقيسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^{*} .

٣. أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=[x]+9$ على الفترة [1 , 4] ، ثم بين أن $V_{a}^{b}\ (\ v_{h}(x)\ ) = V_{a}^{b}\ \ (h)$

السؤال الثاني : (30°) :

١. لتكن لدينا التجزئة $T_{n} = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ للفترة المغلقة [0 , 1] ، والمطلوب :

بين باستخدام هذه التجزئة والتعريف فيما إذا كانت الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} : 0 < x \le 1 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ذ ت م على [0 , 1] ، أم لا ؟ ولماذا ؟ وماهو تغيرها الكلي عندئذ ؟ .

٢- إذا كانت $\lambda\ (E) = 0$ ، فإن الدالة f المعرفة على E المقيسة تكون قيوسة عليها

٣- لتكن المجموعة $A \subset X$ (حيث $X \neq \emptyset$) فأكتب الجبر التام التي تولده هذه المجموعة ، وماذا نعني بقياس ليبيغ λ ثم أوجد : λ(Q) ، λ(]-1,9[) ، λ({0}) .

السؤال الثالث : (24°)

١- أكتب الدالة g(x)= arc tan x *على الفترة* [0 , 1] *على شكل تكامل بحده الأعلى مع أثبات ان الدالة* g ذ ت م على تلك الفترة ثم أحسب تغيرها الكلي عندئذ.

٢- خذ الدالة g السابقة وأحسب التكامل التالي : $J = (S)\int_{0}^{1}\frac{x}{4}\,dg(x)$ بعد التأكد من وجوده .

السؤال الرابع (16°)

١- بين أن الدالة ψ المعرفة على الفترة [-1 , 1] *بالشكل :*

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{4}}\ ;\ x \neq 0 \\ 0\ ;\quad x = 0 \end{cases}$$

قيوسة على تلك الفترة

٢- أثبت أن كلا من مجموعة الأعداد العادية والغير عادية التي تنتمي إلى الفترة [$\sqrt{2}$, 5] تكون مقيسة حسب مفهوم ليبيغ وأحسب قياس كل منها

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الدورة الفصلية الصيفية للعام ٢٠١٠-٢٠١١
لمقرر الدوال محدودة التغير
لطلاب السنة الثالثة - رياضيات

الاسم:
المدة: ٢ سا
الدرجة: ١٠٠

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة: (تمنع الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (٤٠ درجة):

أ- إذا كانت الدالة f ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$, فاثبت أنه يلزم ويكفي أن توجد دالة $G(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ وتحقق العلاقة :

$$|f(x'')-f(x')|\le G(x'')-G(x')\ ;\ a\le x'<x''\le b$$

ب- احسب تكامل ستيلجس (علما أنه موجود) : $J=(s)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx^2$ باستخدام طريقة تبديل المتغير .

ت- بين فيما إذا كانت الدالة: $h(x)=[x]$ مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[-1,5]$, وهل هي قيوسة أم لا على هذه الفترة , ولماذا ؟

ث- إذا كانت μ دالة مجموعات معرفة على $S=\mathcal{P}(X)$ حيث $X\ne\phi$ كما يلي : $\forall E\subseteq X\Rightarrow \mu(E)=0$, فاثبت أن μ قياس على S و أنه متزايد , وهل هو منته أم لا ؟ مع ذكر السبب .

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة g المعرفة على الفترة $E=[0,4]$ بالشكل :

$$g(x)=\begin{cases}x^2-3 & ;\ x\in[0,4]-\mathbb{Z}\\ 0 & ;\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

والمطلوب : ١- هل g دالة قيوسة على $E=[0,4]$ ؟ مع التعليل .

٢- بين أن الدالة $h(x)=x^2-3$ قيوسة على E , ثم احسب قيمة تكامل ليبغ للدالة h على E بعد التأكد من وجوده .

ب- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة غير الخالية على X هي من جديد جبر تام على X,ثم اذكر صفين مولدين لجبر بوريل .

ت- اذكر مثالاً لدالة مستمرة على فترة محدودة $[a,b]$ وليست ذات تغيرات محدودة عليها , مع إثبات ذلك .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة : $B(x)=c+\int_a^x g(u)du$ حيث g دالة كموله ريمانياً على الفترة $[a,b]$ و c ثابت ما , فهل الدالة B مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف , وإذا كانت كذلك فهل هي كموله لوبيغياً على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

ب- أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\begin{cases}x & ;\ 0\le x<1\\ x^2 & ;\ 1\le x\le 3\end{cases}$ على الفترة $[0,3]$, ثم بين فيما إذا كانت الدالة $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)-f$ ذات تغيرات محدودة على نفس الفترة , مع التعليل ؟

ت- أثبت أن متتالية الدوال التي حدها العام : $F_n(x)=x^n\ (n\ge 1)$ متقاربة تقريباً في كل مكان من دالة يطلب تعينها على الفترة $[0,1]$, وهل دالة النهاية قيوسة على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

حمص في ٢٠١١/٨/١٥

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر
د. محمد عامر

